

**Un Modelo Multicriterio de  
Localización de Centros No  
Deseados con Pesos**

**Carlos Guerrero García**





# UN MODELO MULTICRITERIO DE LOCALIZACIÓN DE CENTROS NO DESEADOS CON PESOS



A Rosi, mi esposa, y  
a Alicia, nuestra hija.

GUERRERO GARCÍA, Carlos

Un Modelo Multicriterio de Localización de Centros No Deseados con Pesos

Primera Edición: Consejo Económico y Social de Andalucía, Sevilla, octubre de 2007

205 páginas; 16x24 cms. (Colección Premio de Investigación)

Depósito Legal: SE-5696-07

ISBN-13: 978-84-690-4948-8

© Carlos Guerrero García

© Para esta edición: Consejo Económico y Social de Andalucía, 2007

AUTOR

Carlos Guerrero García

COORDINA

Área de Comunicación. CES Andalucía

EDITA

Junta de Andalucía

Consejo Económico y Social de Andalucía

C/ Gamazo, 30. Sevilla. 41001

Tlf: 95 506 62 51

Fax: 95 506 58 07

E-mail: biblioteca.ces.cem@juntadeandalucia.es

MAQUETACIÓN E IMPRESIÓN

LUMEN 2, S.C.

ISBN-13: 978-84-690-4948-8

DEPÓSITO LEGAL: SE-5696-07

Esta publicación está disponible para la consulta y préstamo en el Centro de Documentación del Consejo Económico y Social de Andalucía y accesible a texto completo en <http://www.juntadeandalucia.es/empleo/ces> (dentro del apartado "Trabajos y publicaciones").

Todos los derechos reservados. Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier procedimiento (ya sea gráfico, electrónico, óptico, mecánico, fotocopia, etc.) y el almacenamiento o transmisión de sus contenidos en soportes magnéticos, sonoros, visuales o de cualquier tipo sin permiso expreso del editor.

La responsabilidad de las opiniones expresadas en la tesis doctoral Un Modelo Multicriterio de Localización de Centros No Deseados con Pesos, presentado a la IV Convocatoria (Año 2006) del Premio de Investigación del Consejo Económico y Social de Andalucía, vincula exclusivamente a su autor, Carlos Guerrero García, y no significa que el CES de Andalucía se identifique necesariamente con ellas, si bien ha considerado conveniente la publicación y distribución de la misma.

# UN MODELO MULTICRITERIO DE LOCALIZACIÓN DE CENTROS NO DESEADOS CON PESOS

Carlos Guerrero García





# Índice

<b>PRÓLOGO</b> , por José Muñoz Pérez y Juan José Saameño Rodríguez	13
<b>AGRADECIMIENTOS</b>	17
<b>INTRODUCCIÓN</b>	21
<b>CAPÍTULO I. PRIMEROS PASOS EN LA TEORÍA DE LA LOCALIZACIÓN</b>	27
1.1. UN PRIMER PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN: EL PROBLEMA DE WEBER	31
1.2. ALGORITMOS DE RESOLUCIÓN PARA EL PROBLEMA DE WEBER	33
1.2.1. El punto de Torricelli	33
1.2.2. Las rectas de Simpson	33
1.2.3. El problema dual	34
1.2.4. La máquina de Varignon	40
1.2.5. El algoritmo de Weiszfeld	40
1.3. UN SEGUNDO PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN: EL PROBLEMA "MINIMAX"	42
1.4. EL MODELO PARA PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN DE UN CENTRO	47
<b>CAPÍTULO II. PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN DE UN CENTRO NO DESEADO</b>	51
2.1. UN MODELO PARA PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN DE UN CENTRO NO DESEADO	54
2.2. PERSPECTIVA HISTÓRICA Y TRABAJOS EXISTENTES	56
<b>CAPÍTULO III. UNA PRIMERA DEPURACIÓN DE PUNTOS CANDIDATOS</b>	65
3.1. DOMINANCIAS	67
3.2. DOMINANCIAS EN LA ENVOLVENTE CONVEXA	69

3.3. DOMINANCIA EN CONJUNTOS CERRADOS Y ACOTADOS	78
<b>CAPÍTULO IV. UN MODELO INTEGRADOR PARA PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN DE UN CENTRO NO DESEADO</b>	<b>83</b>
4.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	86
4.2. DETERMINACIÓN DE PUNTOS CANDIDATOS A SOLUCIÓN	95
4.3. MEDIATRICES	105
<b>CAPÍTULO V. PARTICULARIZACIÓN PARA NORMAS ESTRICTAMENTE CONVEXAS</b>	<b>125</b>
5.1. NORMAS ESTRICTAMENTE CONVEXAS	128
5.2. FUNCIÓN OBJETIVO PARA NORMAS ESTRICTAMENTE CONVEXAS	134
5.3. EL PROBLEMA "MAXIMIN" PARA NORMAS ESTRICTAMENTE CONVEXAS	147
<b>CAPÍTULO VI. ESTUDIO DEL PROBLEMA PARA LA NORMA EUCLÍDEA</b>	<b>153</b>
6.1. EL PROBLEMA "MAXIMIN" PARA LA NORMA EUCLÍDEA	164
6.2. COMENTARIOS ADICIONALES Y EJEMPLOS	164
<b>CAPÍTULO VII. IMPLEMENTACIONES</b>	<b>171</b>
7.1. LA RUTINA <i>TORRCELL</i>	174
7.1.1. La subrutina <i>equilater</i>	174
7.1.2. La subrutina <i>interec</i>	174
7.1.3. La rutina <i>TorrCell</i>	175
7.2. LA RUTINA <i>WTORRCELL</i>	175
7.3. LA RUTINA <i>WEIS</i>	177
7.4. LA RUTINA <i>CHARALAM</i>	177
7.4.1. La subrutina <i>recoloca</i>	178
7.4.2. La subrutina <i>maxindex</i>	178
7.4.3. La subrutina <i>optimo</i>	178
7.4.4. La subrutina <i>generalconcirc</i>	179
7.4.5. La subrutina <i>circint</i>	179
7.4.6. La subrutina <i>circunc</i>	180
7.4.7. La subrutina <i>chara2</i>	180
7.4.8. La subrutina <i>chara3</i>	180
7.4.9. La rutina <i>charalam</i>	182

<b>7.5. LA RUTINA UNDESIRABLE</b>	<b>183</b>
7.5.1. La subrutina <i>quitarep</i>	184
7.5.2. La subrutina <i>isinpoly</i>	184
7.5.3. La subrutina <i>inconvex</i>	185
7.5.4. La subrutina <i>intermedia</i>	185
7.5.5. La subrutina <i>candinterior</i>	186
7.5.6. La subrutina <i>candfrontera</i>	187
7.5.7. La subrutina <i>wsaame</i>	188
7.5.8. La subrutina <i>wplot</i>	189
7.5.9. La subrutina <i>pintamedia</i>	190
7.5.10. La rutina <i>undesirable</i>	191
<b>CAPÍTULO VIII. CONCLUSIONES, APORTACIONES Y TRABAJOS FUTUROS</b>	<b>193</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>199</b>



## PRÓLOGO



## Prólogo

En esta ocasión, el Consejo Económico y Social de Andalucía ha considerado la inclusión, dentro de su colección Premio de Investigación, de esta publicación con el marcado carácter lógico-deductivo propio de la Ciencia Matemática.

El contenido de este trabajo se enmarca dentro de la Teoría de la Localización desde la que se trata de determinar, dentro de una región de referencia, la ubicación óptima para la instalación de centros que proporcionen servicios o beneficios a los usuarios. El estudio de los problemas de localización de centros de servicios que son deseados por los usuarios, y que estos prefieren tenerlos lo más cerca posible, como ocurre con escuelas, centros hospitalarios, centros comerciales, etc, ha acaparado la atención de matemáticos, economistas, geógrafos e ingenieros de todo el mundo desde hace más de cincuenta años.

Por otra parte, hay otro tipo de centros de servicios que está siendo cada vez más demandado por nuestro actual estilo de vida y que, sin embargo, puede tener efectos adversos sobre las personas que viven cerca de ellos porque producen contaminación atmosférica, acústica o, simplemente, por constituir un riesgo potencial para la calidad de vida de los individuos. Así sucede, por ejemplo, con los vertederos de residuos sólidos urbanos, industrias químicas, centrales nucleares, plantas de tratamiento de aguas residuales o de residuos industriales, depósitos radiactivos, centros penitenciarios, etc. Las poblaciones afectadas suelen oponerse a que dichos centros se instalen en sus proximidades y los prefieren lo más alejado posible.

Puesto que debemos respetar los límites de la región de referencia fijada dentro de la cual tenemos que instalar estos servicios, es interesante establecer criterios y procedimientos que permitan determinar los lugares más adecuados, de la forma más razonable e imparcial posible, y que además, tengan en cuenta las diferentes preferencias, sensibilidades y usos que las distintas poblaciones consideradas harán de dicho servicio, pudiendo así lograr un equilibrio justo entre las ventajas y los inconvenientes que afectarán a cada una de ellas.

En la Tesis Doctoral del profesor Carlos Guerrero García, realizada en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga, que se hizo merecedora, en mayo del 2005, de la calificación de sobresaliente cum laude por unanimidad y que aquí se publica, se aborda el problema de la localización de estos últimos tipos de centros desde un modelo matemático general que permite, tanto la diferenciación de cada una de las poblaciones consideradas, como la utilización, tanto de la práctica totalidad de los criterios clásicos, como de otros muchos que pueden ser de utilidad.

Es evidente que el grado de molestia que debe soportar cada una de las poblaciones afectadas está íntimamente relacionado con la distancia que las separa del centro no deseado a instalar, pero además, la forma en la que el efecto pernicioso se propaga puede depender de otros aspectos. Por ejemplo, el mal olor que se desprende de un vertedero se puede ver arrastrado por los vientos dominantes en la zona. El modelo matemático que aquí se propone también permite el empleo de diferentes distancias, pudiendo así optar por aquella que refleje, de la forma más ajustada posible, la realidad del fenómeno a estudiar.

Esta gran versatilidad no impide el tratamiento general de la amplia familia de problemas que el modelo admite y, en este trabajo, se construye un conjunto dentro del cual podemos afirmar que se encuentra la solución a todos y cada uno de tales problemas de localización de centros no deseados. Este conjunto, que se establece en términos de equidistancias (o equidistancias ponderadas por los pesos) entre las poblaciones consideradas, es finito en el caso de que utilicemos las distancias usuales (distancia euclídea, elíptica, rectangular, etc) lo cual nos permite determinar computacionalmente la solución en tiempo polinomial, por ejemplo, utilizando los sencillos algoritmos que se establecen en este trabajo, ofreciéndonos una programación eficiente para obtener la respuesta en tiempo más que aceptable.

Por último, queremos indicar que este trabajo también permite contemplar los problemas de localización de centros no deseados, detestables o peligrosos, como problemas de decisión multicriterio y que el modelo general propuesto puede ser de gran ayuda a las personas, equipos o instituciones que tengan que afrontar este tipo de problemas, proporcionando soluciones de compromiso entre las poblaciones afectadas.

Málaga, marzo de 2007

**José Muñoz Pérez**  
Catedrático de Ciencias de la  
Computación e Inteligencia Artificial  
**Juan José Saameño Rodríguez**  
Catedrático de Escuela Universitaria  
de Matemática Aplicada

## AGRADECIMIENTOS



## Agradecimientos

No quiero dejar escapar la oportunidad que me brinda la elaboración de este trabajo, para poner de manifiesto los nombres de todas aquellas personas que, de una u otra forma, han hecho de mi ilusión una realidad:

- de modo general, a los miembros del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga, de los que he recibido innumerables muestras de apoyo y, en particular, a aquellos que han compartido asignaturas conmigo durante el tiempo que he dedicado a la consecución de esta tarea y su sobrecarga me ha supuesto un ligero alivio;
- a Inmaculada Pérez de Guzmán Molina, por su labor como Directora del Departamento y por su interés constante en la finalización de este trabajo;
- a José Muñoz Pérez, del que, en todas las ocasiones, he recibido una inestimable colaboración;
- a mis directores de Tesis, Juan José Saameño Rodríguez y Jesús Medina Moreno: al primero, por haberme acompañado en mis torpes inicios y del que tanto he aprendido a nivel personal y profesional, y al segundo, por su ayuda desinteresada, incluso en las tareas burocráticas. Ambos han tenido que soportar la ingrata labor de la lectura y corrección de mis múltiples borradores y siempre han demostrado tener conmigo una paciencia infinita;
- a Agustín Valverde Ramos y a Manuel Ojeda Aciego, por sus siempre acertadas y prontas respuestas, por dedicarme su tiempo en mis muchas consultas y por haber compartido conmigo sus conocimientos y su experiencia con LaTeX;

- a mis hermanos, Javier y Pablo; al primero por sus respuestas a mis dudas informáticas, y al último, y muy especialmente, por sus siempre acertados comentarios y por su eficacia y rapidez en resolver todas las cuestiones técnicas que le he planteado;
- a mis padres, Salvador y Concepción, por haber conseguido que sea quien soy, por vuestro aliento, y por ser los responsables de que sepa casi todo lo que sé y por que sea como soy;
- a mi esposa Rosi, porque su trabajo, su esfuerzo y su deseo de superación personal, siempre son para mi un ejemplo del que me siento orgulloso, y a nuestra hija, Alicia, que ha sembrado en nuestras vidas nuevas alegrías y satisfacciones: tanto mi tiempo como el de ellas ha sido invertido aquí;
- al personal de Hemeroteca y Biblioteca de la Universidad de Málaga y muy especialmente a María, Fuensanta y Dori, por haberme facilitado sobremedida la consulta de todos los trabajos necesarios para la elaboración de éste y a Elena, quien desde su cargo de Administrativo de nuestro Departamento, ha sido capaz de simplificar todas las gestiones;
- a todos aquellos que me han hecho llegar tanto acertadas sugerencias como documentos solicitados, de entre los que quiero destacar los nombres, a nivel nacional, de Tomás Recio Muñiz, Francisco Santos Leal, Juan Antonio Mesa López-Colmenar y Antonio José Lozano Palacio, y a nivel internacional, los de Joe Albree, Andreas Klose, Horst Martini y Godfried Toussaint.

A todos ellos, sirvan estas líneas como humilde reconocimiento y vaya desde ellas mi más sincero agradecimiento.

## INTRODUCCIÓN



## Introducción

El presente trabajo se enmarca dentro de una de las líneas de Investigación del Grupo ICAI (Inteligencia Computacional y Análisis de Imágenes) del Plan Andaluz de Universidades (TIC 163) que dirige el Profesor Dr. D. José Muñoz Pérez y que integra a Profesores y Becarios de las áreas de conocimiento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial y Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga. Dicho grupo tiene, como líneas de investigación las siguientes:

- Neurocomputación.
- Análisis de Imágenes Digitales.
- Reconocimiento de Patrones.
- Aprendizaje Computacional.
- Análisis de Agrupaciones (Cluster Analysis) y Clasificación.
- Localización.

Aunque, en una primera lectura, pudiera dar la impresión de que las áreas de trabajo sean muy dispares, el trabajo cotidiano nos ha enseñado que están todas íntimamente ligadas. La puesta en común de los conocimientos, inquietudes y sugerencias de especialistas en cada uno de los temas, proporciona abundantes frutos, como se observa si nos atenemos a los numerosos resultados que viene acumulando el grupo.

Los problemas de localización se plantean y se estudian desde el siglo XVII; grosso modo, estos problemas consisten en buscar la mejor ubicación posible para instalar un centro de servicios que afecta, o afectará, a determinados núcleos de población.

Si el deseo de cada una de las poblaciones colindantes es que el centro a ubicar quede lo más cerca posible de ella, hablaremos de problemas de localización propiamente dichos o problemas de localización de centros deseados. En el caso contrario, en el que una instalación pueda resultar molesta, pernicioso o indeseable para los habitantes, nos enfrentamos a un problema de localización de centros no deseados. Éstos constituyen nuestro marco de trabajo.

La génesis del problema de localización de centros no deseados es relativamente reciente; la práctica totalidad de los resultados obtenidos en este ámbito datan, aproximadamente, de los últimos años y nacen de la inquietud que se ha despertado en la sociedad por todo tipo de contaminaciones. En general, se plantean sobre grafos, sobre redes o sobre espacios continuos (generalmente, el plano real o una esfera). En este trabajo, abordamos los problemas que se plantean para el plano real.

Con la explicación somera que hemos dado acerca de lo que es un problema de localización de centros no deseados es obvio que, en la práctica, no existe casi nunca una ubicación óptima desde el punto de vista de todas las poblaciones receptoras del efecto que produce el centro a instalar, pues cada una de ellas desearía que se ubicara lo más lejos posible; por lo tanto, se hace necesario elegir un criterio, lo más objetivo posible, que nos permita discriminar un lugar respecto de otro. A este respecto, el criterio más extendido en la bibliografía el denominado "maximin", aunque también se tratan otros problemas como el "maxisum", el " $k$ -anticentro", etc.

El trabajo que aquí se presenta recoge, como casos particulares, todos los criterios anteriores y abre la posibilidad de considerar otros nuevos. Así, siguiendo, entre otros, el trabajo (Muñoz Pérez y Saameño Rodríguez, 1999), hemos añadido pesos en la formalización del problema y además, nuestro planteamiento permite trabajar con cualquier tipo de norma. Estas incorporaciones no son gratuitas, ya que la primera de ellas nos permite ponderar daño infringido a cada población, y la segunda nos ayudará a modelar la posibilidad de que el efecto nocivo se propague radialmente con diferentes intensidades en cada dirección.

Atendiendo a todo esto, la tesis se ha estructurado de la siguiente forma:

En el primer capítulo se presentan los orígenes del problema de localización y se recogen algunos resultados y algoritmos de resolución para los problemas más clásicos. Así, realizamos un rápido recorrido por los dos primeros problemas de localización conocidos: el problema de Fermat o de Weber y el problema de Rawls o problema del recubrimiento mínimo, de los que hacemos un balance histórico y comentamos brevemente los trabajos en los que se abordan y que, desde nuestro punto de vista, son los más relevantes en la bibliografía.

En el capítulo segundo, presentamos los problemas clásicos de localización de centros no deseados y subrayamos la necesidad de establecer criterios que nos permitan discriminar conjuntos de puntos de una región dada, acabando dicho capítulo con una recopilación del proceso de evolución de estos problemas y un resumen de los principales trabajos.

Una primera condición que debe verificar cualquier problema de localización de centros no deseados es que si un punto está más alejado de otro respecto a todas las poblaciones, el primero será preferible al segundo para ubicar una instalación de este tipo. Dicho de otra forma, el segundo punto podrá ser eliminado como posible candidato a solución del problema. Esto, dicho en este lenguaje común, nos lleva al concepto de dominancia. En el tercer capítulo se establece formalmente este concepto y se obtiene una primera depuración, conduciéndonos a un conjunto de puntos factibles que será, a partir de entonces, nuestro conjunto de puntos candidatos a solución óptima del problema.

Los siguientes capítulos constituyen el grueso de aportaciones de este trabajo. Así, en el cuarto se define un modelo para la localización de centros no deseados que tiene la virtud de englobar a los modelos existentes en la actualidad y la capacidad de poder considerar otros nuevos que también pueden ser de utilidad. La ventaja de este enfoque radica, principalmente, en que nos proporcionará una metodología única para abordar todos los problemas de localización de centros no deseados que se usan habitualmente. Se determina un conjunto de puntos candidatos a solución, por una parte, mediante la intersección de la frontera de la región considerada con las mediatrices ponderadas asociadas a las poblaciones afectadas y, por otra, intersectando entre sí dos de tales mediatrices. En estas condiciones, se concluye el capítulo cuatro con un estudio genérico de la naturaleza de ellas para cualquier norma.

Cuando restringimos el conjunto de normas utilizadas, a las normas estrictamente convexas, cosa que hacemos en el capítulo cinco, se llega a la conclusión de que no hay más puntos candidatos a una solución óptima que los que se determinaron en el capítulo anterior; es decir, se caracteriza el conjunto de puntos candidatos a solución como el conjunto  $V \cup I \cup E$ , donde  $V$  es el conjunto de vértices del polígono dado,  $I$  es el conjunto de puntos de la frontera del polígono que equidistan de forma ponderada de dos poblaciones y  $E$  es el conjunto de puntos interiores al polígono que equidistan de forma ponderada de dos pares diferentes de poblaciones. Así, para un criterio concreto (por ejemplo, el "maximin") podemos llegar, con relativa facilidad, a los resultados que ya son conocidos.

En el sexto capítulo, a modo de ejemplo, hemos desarrollado un estudio completo cuando trabajamos con una norma específica. Aquí lo hemos hecho para la norma euclídea, estableciendo que el conjunto  $V \cup I \cup E$  es finito y construyendo un algoritmo que, con una complejidad de orden  $\mathcal{O}(m^4)$  siendo  $m$  el número de poblaciones afectadas, nos lleva a la solución óptima del problema. La misma metodología seguida en este caso, la podríamos aplicar a otro tipo de normas, como la 1-norma, normas en las que las curvas de nivel fuesen elípticas, ..., llegándose a resultados equivalentes a éstos.

El trabajo concluye con un capítulo que hemos denominado implementaciones, en el que se exponen los códigos en MATLAB de las diferentes rutinas que se han ido utilizando, o aparecen mencionadas, tanto en este trabajo como en la bibliografía que hemos usado en el mismo.



## **CAPÍTULO I:**

### **PRIMEROS PASOS EN LA TEORÍA DE LA LOCALIZACIÓN**



## Primeros pasos en la Teoría de la Localización

Un problema de localización consiste, esencialmente, en buscar la mejor ubicación dentro de una región, para instalar un centro de servicios que atienda las demandas de un conjunto de poblaciones, representados tanto unos como otras, por puntos de cierto espacio de trabajo.

Como se desprende de esta definición genérica del problema de localización, dos son los factores a tener en cuenta en primera instancia:

- ¿Cuáles son los lugares posibles?
- ¿En base a qué criterio decidimos que una ubicación es mejor que otra?

La respuesta a la primera de las cuestiones determina el espacio de trabajo: aunque en ocasiones podemos modelarlo de forma discreta (por ejemplo, a través de los nodos de una red o de un grafo), nos vamos a centrar en los modelos que podemos describir a través de variables continuas (coordenadas), hablando así de lo que se conoce como problemas de localización continua. Concretamente, nuestro campo de investigación va a estar centrado en espacios bidimensionales planos (un circuito integrado, un trozo de papel, o una zona geográfica no muy extensa).

En general, en la teoría de la localización también se abordan problemas planteados sobre otros tipos de espacios: en algunas ocasiones bastará con una única variable para describirlos, como sucedería si estuviésemos interesados en trabajar sobre una línea (recta, curva o quebrada) como, por ejemplo, un tramo de autopista, una corriente de agua o una vía férrea; sin embargo, también podríamos estar interesados en otros espacios que, sin ser planos, se pueden describir a través de dos coordenadas (por ejemplo, regiones esféricas al considerar una zona geográfica muy vasta, un continente o el globo terráqueo al completo) o incluso trabajar con posiciones en cada una de las posibles plantas

dentro de un edificio o tener en cuenta lugares bajo el agua o en el aire y, por tanto, necesitaríamos una variable más para indicar la altura o la profundidad.

Si bien en el caso discreto podemos enumerar todos los lugares posibles, no sucede así en el caso de la localización en espacios continuos, donde lo único que podemos afirmar es que los candidatos a ser una localización óptima estarán en el espacio de trabajo y nuestra labor consiste en intentar ponerlos de relieve. De esta forma, los modelos de localización en espacios continuos actúan como “generadores de puntos” y nos conducirán a problemas con una fuerte componente geométrica.

En principio, podría suceder que la región objeto de nuestro estudio no conlleve ninguna restricción sobre el espacio de trabajo. Sin embargo, si la naturaleza de nuestro problema es geográfica, suele ser frecuente que la región de referencia venga descrita como el interior de una región poligonal cuyo borde está determinado por una colección de puntos consecutivos unidos por segmentos. En otros casos la región puede ser mucho más complicada, sobre todo si entran en juego aspectos técnicos, económicos o políticos.

La segunda cuestión a estudiar, en la que fijamos un criterio para evaluar cada posible ubicación, pasa por especificar nuestro objetivo. Para los modelos con los que vamos a trabajar, será siempre el de localizar aquellas ubicaciones que no puedan ser mejoradas. Por tanto, nuestros modelos intentarán siempre minimizar algún coste o algún perjuicio y/o maximizar ganancias o algún beneficio.

Este objetivo puede venir especificado a través de uno o varios criterios. El caso de un único criterio, nos conduce a los problemas clásicos de encontrar un máximo o un mínimo de alguna función de las variables que describen nuestro espacio. Sin embargo, cuando nuestro interés se centra en varios criterios, la forma más extendida de abordar estos problemas pasa por determinar todos los puntos eficientes o no dominados.

En general, lo que distingue a una posible ubicación de otra es la posición relativa a un conjunto de puntos dados, y una de las formas más básicas de diferenciarla es a través de la distancia. Aunque esta distancia dependerá del problema que estemos intentando abordar y de la forma de modelarlo, nos restringiremos a la utilización de distancias que provienen de normas. En particular, podemos modelar los problemas más clásicos relacionados con los de la geometría euclídea en el plano, en los que la distancia utilizada es la que proviene de la norma  $\|\cdot\|_2$  (si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ )

Algunos problemas nos conducirán a modelos “atractivos” en los que nuestro interés radica en hacer mínima las distancias a una colección de puntos dados. Por el contrario, otros problemas nos pueden conducir a modelos “repulsivos”, en los que nos interesará hacer máximas esas distancias. Incluso, algunos problemas nos conducirán a modelos mixtos, en los que nuestro objetivo puede tener componentes “atractivas” y “repulsivas” a la vez.

## 1.1. Un primer problema de localización: el problema de Weber

En la Teoría de la Localización el problema más clásico y conocido es el problema de Weber, con una larga y enrevesada historia. Aunque pueda parecer extremadamente simple, tiene tantos puntos de vista y generalizaciones que ha dado lugar a numerosos trabajos desde el siglo XVII hasta nuestros días (podemos encontrar un recorrido histórico del problema en (Love et al., 1988), (Francis et al., 1992) y (Wesolowsky, 1993)). No es fácil ponerse de acuerdo en su denominación y así, examinando la bibliografía, algunos de los nombres con los que también se conoce son: el problema de Fermat, de Fermat generalizado, de Fermat-Torricelli, de Steiner, de Steiner generalizado, de Steiner-Weber, de la mediana, del centro mediano, minisum, del punto de distancia total mínima, de la mediana bidimensional o el problema de la mediana en el espacio.

De entre sus múltiples variantes, quizá la formulación más común sea la de encontrar un punto  $(x^*, y^*)$  que minimice la suma de las distancias ponderadas a una colección de puntos dados  $a_i = (a_{i1}, a_{i2})$ , denotando a los pesos asociados a cada punto por  $w_i$ . El ejemplo más sencillo de aplicación de este problema es el de localizar la mejor ubicación de un almacén entendiendo los pesos  $w_i$  como el coste por unidad enviada a los usuarios situados en los puntos fijados  $(a_{i1}, a_{i2})$ ; así la ubicación  $(x^*, y^*)$  es la que minimiza los costes de transporte. En este sentido, se puede entender el punto  $(x^*, y^*)$  como la generalización a dos dimensiones de la mediana unidimensional, y de ahí el nombre de la “mediana en el espacio”.

Su enunciado analítico es

$$\min_P \left( \sum_{i=1}^m w_i \cdot d(P, a_i) \right)$$

siendo  $d(P, a_i)$  la distancia euclídea entre  $P$  y  $a_i$ , aunque también podemos encontrárnoslo expresado a través de coordenadas como

$$\min_{(x,y)} \left( \sum_{i=1}^m w_i \cdot \sqrt{(x - a_{i1})^2 + (y - a_{i2})^2} \right)$$

Quién fue el primero que propuso este problema y en qué términos es algo que quizá nunca sepamos. El problema originalmente podría provenir de Fermat, Torricelli o Cavalieri, y aunque Viviani y Roberval también trabajaron en él, parece improbable que fueran estos últimos sus autores.

En (Kuhn, 1967) se atribuye a Pierre de Fermat (1601–1665) la autoría del problema de la mediana en el espacio al lanzar el siguiente reto:

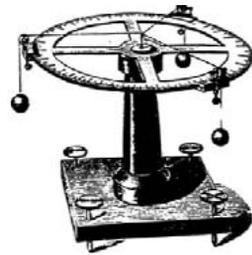
*“Aquel que no esté de acuerdo con mi método, que intente resolver el siguiente problema: dados tres puntos del plano, encontrar un cuarto punto de tal forma que la suma de las distancias a los tres puntos dados sea la menor posible.”*

Sin embargo, en (Zacharias, 1913) se atribuye a Torricelli su propuesta e incluso la presentación de varios métodos para su resolución, como se pueden encontrar en (Honsberger, 1973) y (Dorrie, 1965), de ahí que el punto en cuestión reciba el nombre de “punto de Torricelli”.

También se suele atribuir, tanto el planteamiento como la resolución del problema al matemático italiano Battista Cavalieri (1598–1647), quien en su “Exerciones Geometricae” de 1647 demuestra que las rectas que unen el punto de Torricelli de un triángulo, con sus vértices, forman dos a dos ángulos de 120 grados<sup>1</sup>. En (Melzak, 1983) se comenta que Cavalieri se lo propuso a Fermat y éste a Torricelli quien volvió a obtener la solución apuntada por el primero de ellos.

En el siglo XX, el problema y su solución se retomaron para utilizarlos en casos reales. Alfred Weber (1868–1958) en su libro (Weber, 1909) utilizó la versión ponderada del problema para tres puntos al buscar la ubicación de una fábrica que hiciera mínimos los costes de transporte: de los tres puntos, dos de ellos eran fuentes de materias primas con diferentes pesos y el tercero era un punto de venta.

En un apéndice de este libro, Georg Pick describe un procedimiento geométrico para encontrar la solución. En él, Pick hace referencia a “un viejo aparato inventado por Varignon”, y utiliza la analogía mecánica para describir el problema y apuntar la solución para el caso en el que el número de puntos sea mayor o igual que tres.



En 1936, el matemático húngaro Endre Vaszanyi Weiszfeld (ahora conocido como Andrew Vaszanyi) propuso en (Weiszfeld, 1936) un algoritmo iterativo para encontrar la mediana espacial o el punto minisum en el plano euclídeo para valores grandes de  $m$  y pesos distintos. Puesto que sólo era apropiado para la era de los ordenadores, estuvo en desuso hasta finales de los 50 y principios de los 60: se basa en la utilización de un método de punto fijo obtenido al “despejar” convenientemente las coordenadas  $(x, y)$  del punto buscado del sistema de ecuaciones no lineales que se genera al imponer las condiciones de extremo de primer orden.

<sup>1</sup> Entre las muchas construcciones geométricas existentes, destaquemos la que se puede encontrar en el libro “Doctrine and Application of Fluxions” escrito en 1750 por Thomas Simpson (1710–1761).

## 1.2. Algoritmos de resolución para el problema de Weber

### 1.2.1. El punto de Torricelli

Veamos una solución al problema de Weber sin pesos para tres puntos atribuida a Torricelli: unimos los tres puntos dados  $A$ ,  $B$  y  $C$  construyendo así un triángulo y dibujamos tres triángulos equiláteros hacia fuera sobre cada uno de sus lados. Los tres círculos que circunscriban a estos nuevos triángulos se intersecan en la mediana espacial; este punto  $T$  (llamado “punto de Torricelli” o a veces “punto de Fermat”) se puede demostrar que es la solución del problema de Weber para tres puntos. El teorema de Napoleón (ver, por ejemplo, (Berger, 1987)) puede servir como base para una posible demostración.

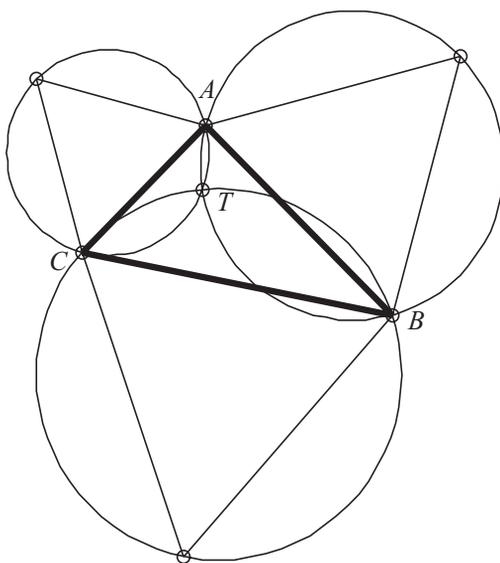


Figura 1.1. Punto de Torricelli a través de la configuración de Torricelli.

Tanto esta solución de Torricelli como la siguiente de Simpson, conducen a la solución del problema de Weber cuando el triángulo formado por los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  no tiene ningún ángulo mayor de  $120^\circ$ ; en caso contrario, las soluciones anteriores caerían fuera del triángulo. En tal caso, la solución al problema de Weber es el punto inicial correspondiente a dicho ángulo.

### 1.2.2. Las rectas de Simpson

Simpson sugirió utilizar los vértices externos de los triángulos equiláteros propuestos por Torricelli, para unirlos con los puntos dados opuestos. Estas rectas, que se llaman las “rectas de Simpson”, se intersecan en el “punto de Torricelli”.

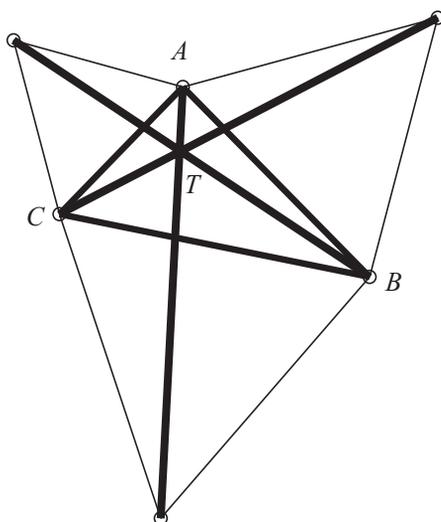


Figura 3.2. Punto de Torricelli a través de las rectas de Simpson.

Entre las muchas rutinas implementadas para MATLAB que aparecen en este trabajo, tenemos que hacer aquí una mención especial a la denominada *torrcell* (presentada en la sección 7.1) que calcula el “punto de Torricelli” en función de las entradas (los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ ) utilizando las rectas de Simpson. Además, en (Martini, 1996) se generaliza este esquema de resolución para el problema de Weber con pesos, utilizando un procedimiento análogo al ya comentado, sustituyendo los triángulos equiláteros sobre los lados del triángulo inicial por triángulos semejantes al determinado por los pesos. De esta forma, también se ha construido la correspondiente rutina, denominada *wtorrcell* que se presenta en la sección 7.2, siguiendo el esquema que allí se propone.

### 1.2.3. El problema dual

También podemos remontarnos a los orígenes del problema dual: en la página 47 del “Ladies Diary” o “Woman’s Almanack” de 1755, editado por Thomas Simpson, aparece el siguiente problema propuesto por Thomas Moss:

*“En los tres lados de un campo equiangular se encuentran tres árboles a distancias 10, 12 y 16 entre ellos. Encontrar el contenido del mayor campo que admiten estos datos.”*

del que podemos encontrar dos soluciones en la página 109 el libro “The Mathematical Questions proposed in the Ladies’ Diary and their original answers, together with some new solutions, from its commencement in the year 1704 to 1816” recogidas en (Leybourn, 1817), reproducidas, tanto unas como otras, en las páginas siguientes por el valor histórico que encierran.

*The* LADIES *Diary* |  
OR,  
Woman's ALMANACK,  
For the YEAR of our LORD, 1755.  
Containing New Improvements in ARTS and SCIENCES,  
And many Entertaining PARTICULARS.  
Adapted for the *Use* and *Diverſion* of the  
FAIR-SEX.

Being the Fifty-second ALMANACK Publish'd of this Kind.



YE Happy FAIR, whom Sacred Transports fire,  
Accept, propitious, what Your Selves inspire :  
For YOU the MUSE her kindest Influence lends,  
And SCIENCE wide it's ample Bounds extends.  
Alike your FORM and WIT' resistless charm,  
With LOVE and VIRTUE every Bosom warm.

Printed by *A. Wilde*, for the Company of STATIONERS, 1755.

*The Woman's Almanack, 1755.*47<sup>a</sup>

## IV. QUESTION 394 by Mr. W. Kingdon.

THE Distance of the Centers of two Circles, whose Diameters are 50 each; being given = 30; 'tis required to find the Side of the Square inscribed in the Intersection, or Space common to both Circles.

## V. QUESTION 395 by Mr. Walter Trott.

SAILING on a certain Course, we observed a Head-land to bear due West from us; four Hours after which It was seen at W. S. W. and six Hours after this (we still continuing to run at the same Rate) its Bearing was found to be S. S. W. What was our Course at that Time?

## VI. QUESTION 396 by Mr. Tho. Mofs.

IN the three Sides of an equiangular Field stand three Trees, at the Distances of 10, 12, and 16 Chains from one another: To find the Content of the Field, it being the greatest the Data will admit of?

## VII. QUESTION 397 by Mr. J. Ash.

STANDING at the End of a Visto, at the Distance of 50 Yards from each of the parallel Sides, the Opening of the said Sides, at a Sylvan Statue before me, appeared to be  $\frac{3}{2}$  of the Opening of the further End; the Part, or Length, on this Side the Statue being to the Part on the other Side in the Ratio of 1000 to 501: From hence I would know the Distance of the Statue from the Point of Observation, and the whole Length of the Visto?

## VIII. QUESTION 398 by Mr. Richard Gibbons.

BEING on a Journey, I took a Guide at Modbury for Dartmouth; with whom having travelled 66 Minutes, I asked him how far we were come? who replied, just half so far as we are now from Totness. Having jogged on together seven Miles farther, I asked him how far we had now to travel? whose Answer was still the same, just half as far as we are from Totness: These indirect Answers I did not like, tho' I found when we arrived at Dartmouth, which we reached in 55 Minutes more, that all the Fellow had said was strictly true, and that the two Roads leading from Totness to Dartmouth and Modbury formed a Right-Angle. From hence I would know the true Distances of the three Towns, and the Rate at which we travelled, which was uniform?

## IX. QUESTION 399 by Mr. H. Watson.

THE Latitudes and Longitudes of three Places on the Earth's Surface, suppose London, Moscow, and Constantinople, being given, as below; required the Latitude and Longitude of that Place which is equidistant from the former three?

The Latitude of London is  $51^{\circ}.30'$  the Latitude and Longitude of Moscow  $55^{\circ}.45'$  and  $38^{\circ}.00'$ , and those of Constantinople  $41^{\circ}.30'$  and  $29^{\circ}.15'$ , respectively.

## X. QUESTION 400 by Mr. Hugh Brown.

A Lends B 1000l. for which B repays him as follows, viz. at the End of three Months 180l. of five Months 150l. of six Months 140l. of eight Months 100l. of nine Months 90l. of ten Months 120l. and at the Year's End 250l. The Rate of Interest is required?

## XI. QUESTION 401 by Mr. E. Rollinson.

TO investigate the Value of an Annuity, on a Life of a given Age, according to any Table of Observations on the Degrees of Mortality of Mankind, by dividing the whole Extent of Life into different Periods, during which the Decrements, or Numbers dying off yearly, may be esteemed equal, without having any other Series to sum than a common Geometrical Progression.

## XII. QUESTION 402 by Mr. W. Bevil.

SUPPOSE the Ends of a Thread, ten Feet long, be fastened to two Tacks, in the same Horizontal Line, at the Distance of six Feet: I would know where two Weights, the one three and the other five Ounces, must be fixed to the Thread, so as to hang at rest in the same Horizontal Line at the Distance of three Feet from the Level of the Tacks?

## XIII. QUESTION 403 by Mr. Tho. Mofs.

SUPPOSE that, from the Top of a Mountain, in Form of a Paraboloid, whose perpendicular Height is 600 Yards and its Base-Diameter three Miles, a Cannon Ball is to be discharged with a Quantity of Powder sufficient to carry it to the Height of 700 Yards in a vertical Direction; I would know the Elevation of the Piece so that the Ball may fall at the greatest Distance possible from the Place of Projection?

THE  
MATHEMATICAL QUESTIONS,  
PROPOSED IN THE  
**LADIES' DIARY,**  
AND THEIR ORIGINAL ANSWERS,  
*TOGETHER WITH SOME NEW SOLUTIONS,*  
FROM ITS COMMENCEMENT IN THE YEAR

1704 TO 1816.

---

---

IN FOUR VOLUMES.

---

---

BY THOMAS LEYBOURN,  
*OF THE ROYAL MILITARY COLLEGE.*

---

---

VOL. II.

---

---

London :

PRINTED BY W. GLENDINNING, HATTON GARDEN ;  
AND  
PUBLISHED BY J. MAWMAN, LUDGATE STREET ;  
J. DEIGHTON AND SON, CAMBRIDGE ; AND J. PARKER, OXFORD.

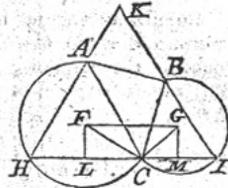
1817.

VI. QUESTION 396, by Mr. Thos. Moss.

'In the three sides of an equi-angular field stand three trees, at the distances of 10, 12, and 16 chains from one another; To find the content of the field, it being the greatest the data will admit of?

Answered by Mr. W. Bevil.

*Construction.* The given points A, B, C being joined, upon AC and BC let two segments of circles be described, each to contain an angle of  $60^\circ$ ; join their centres by the line FG, and parallel thereto draw HCI cutting the two circles in H and I; then through A and B draw HK and IK, so shall HKI be the triangle required.



For, supposing FL and GM to be perpendicular to HI, and HI (always terminated by the circles) to revolve about the point C, it is plain that, when HI is a maximum, LM, being the half thereof must also be a maximum; and this will evidently be when LM is parallel to FG.

*Calculation.* In the triangle ABC are given all the sides, to find the angle  $C = 38^\circ 38'$ ; then in the triangle FCG are given the angle  $C = 98^\circ 38'$ , and the ratio of the containing sides, as AC to BC (or 16 to 12); whence is found the angle F ( $= HCF$ )  $= 33^\circ 41'$ , and the angle G ( $= ICG$ )  $= 47^\circ 4'$ : therefore  $HCA = 63^\circ 41'$ ,  $ICB = 77^\circ 4'$ ,  $CAH = 56^\circ 19'$ ,  $CBI = 42^\circ 56'$ ,  $HI (= HC + CI) = 24.7$ , and the area  $= 26.42 = 26$  acres, 1 rood, 27 perches.

*Algebraic Solution to the same by Mr. W. Spicer.*

Put  $a = BC = 12$ ,  $b = BA = 10$ ,  $s = \text{sine of } 60^\circ$ , and  $p$  and  $-q$  equal to the sine and cosine of  $\angle BCI + \angle BAK = 152^\circ 51' 58''$ , and  $x$  and  $y$  those of  $\angle BAK$ : Then will  $py + qx = \text{sine } \angle BCI$ ; and (per trig.)  $s : b :: x : bx \div s = BK$ ; and  $s : a :: py + qx : (apy + aqx) \div s = BI$ : Therefore  $(bx + aqx + apy) \div s = IK$ , a max. In fluxions,  $b\dot{x} + aq\dot{x} + ap\dot{y} = 0$ : But  $\dot{y} = -x\dot{x} \div y$ ; whence  $b\dot{x} + aq\dot{x} - apx\dot{x} \div y = 0$ : Solved,  $x \div y (= \text{tang. } \angle BAK) = (b + aq) \div ap$ . Hence  $(1 \div s) \sqrt{(aa + 2abq + bb)} = IK = 24.7002$ ; and  $\sqrt{\frac{1}{3}} \times (aa + 2abq + bb) = 26.42$  the area required.

Many contributors have solved this question upon a supposition that one side of the required triangle is parallel to the longest side of the given one; which though very near, is not strictly true; the said sides, when the area is the greatest possible, being inclined to each other in an angle of  $3^\circ 41'$ .

Este problema geométrico aparece de una forma más académica en la página 384 del volumen I de “Annales de Mathematiques Pures et Appliques”:

*“Dado un triángulo cualquiera, circunscribir a él el mayor triángulo equilátero posible.”*

La solución la podemos encontrar en el Volumen II de (Rochat et al., 1811):

*“...Así, el mayor triángulo equilátero que circunscribe a un triángulo tiene sus lados perpendiculares a las rectas que unen los vértices del triángulo dado con el punto tal que la suma de las distancias a esos vértices es mínima... De donde se puede deducir que la altura del mayor triángulo equilátero que circunscribe a un triángulo dado es igual a la suma de las distancias de los vértices del triángulo dado al punto que hace mínima la suma de las distancias.”*

Por tanto, este problema es el dual de la versión sin pesos del problema correspondiente a tres puntos (una historia del problema dual la podemos encontrar en (Kuhn, 1976), y dos formulaciones independientes en (Witzgall, 1964) y en el propio (Kuhn, 1976)).

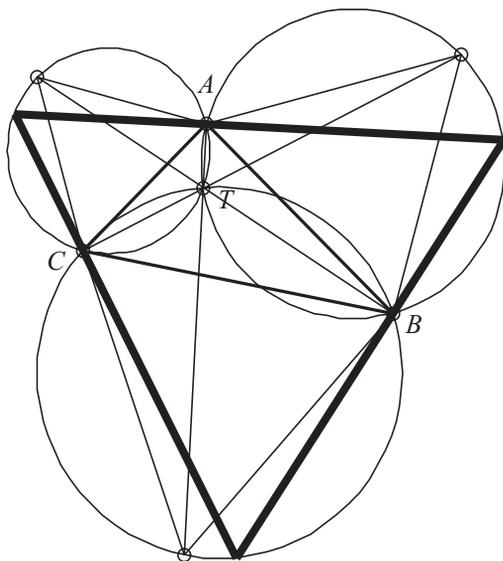


Figura 1.3. Punto de Torricelli a través del problema dual.

### 1.2.4. La máquina de Varignon

Varignon propuso una analogía mecánica que se sigue usando en la actualidad y proporciona un punto de vista diferente para el problema. Básicamente, consiste en un tablero con agujeros en las coordenadas de  $m$  puntos dados. Uniendo  $m$  cuerdas con un nudo hacemos pasar cada uno de los  $m$  extremos por cada uno de los agujeros, suspendiendo de ellos pesos en función de las magnitudes  $w_i$ . En condiciones ideales (es decir, si no existiesen los efectos negativos de los rozamientos, las cuerdas fuesen infinitamente finas, los agujeros infinitamente pequeños,...), las coordenadas  $(x, y)$  de la posición final del nudo coincidirían con las del punto buscado.

Podemos justificar tal coincidencia observando que, si  $d_i(x, y)$  denota la distancia euclídea entre  $(x, y)$  y  $a_i = (a_{i1}, a_{i2})$ , la primera componente de la fuerza ejercida por cada uno de los pesos  $w_i$  es

$$\frac{w_i \cdot (x - a_{i1})}{d_i(x, y)}$$

con lo que la suma de todas estas componentes da lugar al primer miembro de la primera de las ecuaciones que generan el algoritmo de Weiszfeld (ver a continuación) y lo mismo sucede con la segunda componente.

### 1.2.5. El algoritmo de Weiszfeld

La técnica más sencilla y más recurrida para resolver el problema de Weber es el llamado "algoritmo de Weiszfeld", que se detalla a continuación:

Si consideramos la función

$$W(x, y) = \sum_{i=1}^m w_i \cdot \sqrt{(x - a_{i1})^2 + (y - a_{i2})^2}$$

e imponemos la condición de optimalidad de primer orden, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial x} = \sum_{i=1}^m \frac{w_i \cdot (x - a_{i1})}{\sqrt{(x - a_{i1})^2 + (y - a_{i2})^2}} = 0$$

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial y} = \sum_{i=1}^m \frac{w_i \cdot (y - a_{i2})}{\sqrt{(x - a_{i1})^2 + (y - a_{i2})^2}} = 0$$

Como es obvio que  $W(x, y)$  es convexa, estas condiciones definen un mínimo. Sin embargo, es evidente que las derivadas parciales no existen cuando  $(x, y)$  coincide con algunos de los puntos dados  $a_i = (a_{i1}, a_{i2})$ , puesto que se verifica que

$$\sqrt{(x - a_{i1})^2 + (y - a_{i2})^2} = 0$$

Además, en general, el sistema no se puede resolver explícitamente para  $m > 3$ .

La solución de este sistema de ecuaciones no lineales se puede obtener utilizando el siguiente método iterativo que, bajo ciertas condiciones, conducen a un punto fijo:

$$x_{k+1} = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{w_i \cdot a_{i1}}{\sqrt{(x_k - a_{i1})^2 + (y_k - a_{i2})^2}}}{\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{\sqrt{(x_k - a_{i1})^2 + (y_k - a_{i2})^2}}}$$

$$y_{k+1} = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{w_i \cdot a_{i2}}{\sqrt{(x_k - a_{i1})^2 + (y_k - a_{i2})^2}}}{\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{\sqrt{(x_k - a_{i1})^2 + (y_k - a_{i2})^2}}}$$

Así, una vez que tengamos el punto  $(x_k, y_k)$ , podemos construir el siguiente sustituyendo los correspondientes valores en la expresión anterior. La idea de buscar una ecuación de punto fijo para obtener un método iterativo que nos conduzca a la solución es bastante conocida en el campo del análisis numérico y pertenece a la clase de procedimientos conocidos como "métodos de aproximaciones sucesivas unipunto", puesto que sólo necesitamos el punto actual para determinar el siguiente.

El algoritmo de Weiszfeld (implementado a través de la rutina *weis* que se presenta en la sección 7.3) tiene sus inconvenientes: el método deja de funcionar si alguna iteración coincide con alguno de los puntos  $(a_{i1}, a_{i2})$ , como se observa en (Kuhn, 1973) y en (Chandrasekaran y Tamir, 1989). En el primero, el autor conjetura que, en la generalización de este algoritmo a  $\mathbb{R}^n$ , el conjun-

to de puntos iniciales para el que el algoritmo de Weiszfeld deja de funcionar es sólo un conjunto numerable. Sin embargo, en el segundo se comprueba que ese resultado no es cierto y se imponen condiciones necesarias para que lo sea. Aunque en (Brimberg, 1995) se establece que esas condiciones son también suficientes, recientemente se ha puesto de manifiesto en (Canovas et al., 2002) que uno de los argumentos utilizados por Brimberg en su demostración no es correcto, con lo que no queda probada la conjetura de Chandrasekaran y Tamir.

Además, el algoritmo de Weiszfeld puede llegar a ser muy costoso en tiempo, como se observa si consideramos, por ejemplo, los puntos

$$a_1 = \left( \frac{1}{2}, \frac{-1}{2} \right), a_2 = \left( \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2} \right), a_3 = \left( \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$a_4 = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), a_5 = (100, 0)$$

con pesos respectivos (1,1,1,1,4). Aunque el mínimo de  $W(x, y)$  se alcanza en  $a_5$ , el algoritmo de Weiszfeld, empezando en el punto (50,0), alcanza el punto (90.4410,0) tras 100.000 iteraciones, el (97.4468,0) tras 200.000 iteraciones, y tras un millón de iteraciones ni siquiera se alcanza una precisión de  $10^{-4}$ , puesto que se obtiene el punto (99.999877,0).

A finales de los 60, empezaron a poderse conseguir una gran cantidad de algoritmos para la optimización de funciones no lineales, aplicables a la función  $W(x, y)$  que es convexa (como se demuestra en (Love, 1967)), aunque sus derivadas no existen en los puntos dados. Sin embargo, se sigue utilizando el algoritmo de Weiszfeld que es simple, elegante y se acerca a la solución en cada paso (un detallado estudio acerca de este algoritmo se puede encontrar en (Kuhn y Kuenne, 1962), en (Morris, 1981), en (Brimberg, 1989) o en (Juel y Love, 1986)). Desde su aparición hasta nuestros días se han propuesto diversas variantes dirigidas a paliar sus deficiencias y así se puede, por ejemplo, encontrar una forma de acelerar su convergencia en (Drezner, 1992), en (Drezner, 1996) o más recientemente en (Brimberg et al., 1998).

### 1.3. Un segundo problema de localización: el problema “minimax”

Otro problema clásico es el conocido como el “problema del recubrimiento mínimo”, propuesto en una nota en (Sylvester, 1857), que se puede enunciar como el de encontrar un círculo de centro  $(x^*, y^*)$  y de radio mínimo  $r^*$  de tal forma que todo un conjunto inicial de puntos del plano  $a_1, a_2, \dots, a_m$  pertenezcan a él.

Podemos utilizar la solución de este problema para determinar tanto la ubicación de una sirena como la mínima potencia con la que tenemos que dotarla para que sea escuchada en todas las poblaciones colindantes. Puesto que las ondas acústicas se propagan por el aire en línea recta y de forma uniforme en todas las direcciones, podemos utilizar la distancia euclídea. Por otra parte, la calidad de la recepción desciende en función de la distancia, con lo que el objetivo de cada población es que la sirena se sitúe lo más cerca posible de ella para poder garantizar que es escuchada con claridad.

Se puede probar fácilmente que, siendo  $d_i(x, y)$  la distancia euclídea entre  $(x, y)$  y  $a_i = (a_{i1}, a_{i2})$ ,

$$r^* = \min_{(x,y)} \left\{ \max_{i=1,2,\dots,m} d_i(x,y) \right\}$$

y  $(x^*, y^*)$  el punto en el que se alcanza dicho mínimo, el menor círculo que no deja fuera a ninguno de los puntos  $a_i$  es el de centro  $(x^*, y^*)$  y radio  $r^*$ , con lo que la mínima potencia de la que tenemos que dotar al emisor debería ser tal que sea capaz de salvar la distancia  $r^*$ .

También podemos considerar una versión ponderada de este problema, obteniendo así el de determinar

$$\min_{(x,y)} \left\{ \max_{i=1,2,\dots,m} w_i \cdot d_i(x,y) \right\}$$

para un conjunto de puntos dados  $a_i \in \mathbb{R}^2, i = 1, 2, \dots, m$ , siendo las constantes  $w_i$  positivas. Este problema se conoce como el problema de Rawls o problema "minimax".

En (Elzinga y Hearn, 1972) podemos encontrar el siguiente algoritmo (cuya complejidad es cuadrática respecto al número de puntos) para resolver el problema "minimax" sin pesos:

1. Elijamos dos puntos  $a_i$  y  $a_j$
2. Construyamos el círculo cuyo diámetro une  $a_i$  y  $a_j$ . Si ese círculo contiene a todos los puntos, entonces su centro es el punto buscado. En caso contrario, elijamos un tercer punto  $a_k$  fuera de él.
3. Si el triángulo determinado por  $a_i, a_j$  y  $a_k$  es rectángulo u obtusángulo, renombramos los puntos opuestos al ángulo recto u obtuso como  $a_i$  y  $a_j$  y volvamos al paso 2. En caso contrario, los tres puntos determinan un triángulo acutángulo. Construyamos el círculo que pasa por esos tres puntos. Recordemos que el radio  $r$  y las

coordenadas del centro  $(x, y)$  de la circunferencia que pasa por los puntos  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  lo podemos calcular como

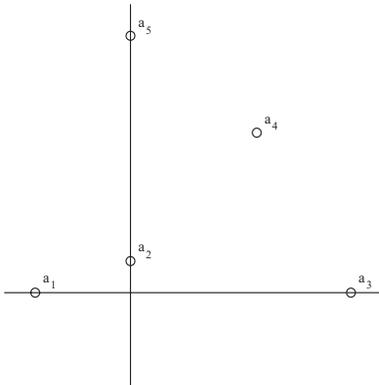
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0^2 + y_0^2 & y_0 \\ 1 & x_1^2 + y_1^2 & y_1 \\ 1 & x_2^2 + y_2^2 & y_2 \end{vmatrix}}{2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0^2 + y_0^2 & x_0 \\ 1 & x_1^2 + y_1^2 & x_1 \\ 1 & x_2^2 + y_2^2 & x_2 \end{vmatrix}}{2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0 \\ 1 & y_1 & x_1 \\ 1 & y_2 & x_2 \end{vmatrix}}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & x_0^2 + y_0^2 \\ x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}}$$

Si este nuevo círculo contiene a todos los puntos, entonces su centro es el punto buscado. En caso contrario, pasamos al siguiente paso.

4. Elijamos un punto  $a_i$  que no esté en el círculo y sea  $b$  el punto más lejano de  $a_i$  de entre  $a_i, a_j$  y  $a_k$ . Consideremos la recta que extiende al diámetro que pasa por  $b$  y que divide al plano en dos. Sea  $c$  el punto de entre los  $a_i, a_j$  y  $a_k$  que no está en el mismo semiplano que  $a_i$ . Con los puntos  $a_i, b$  y  $c$ , volvamos al paso 3.

Veamos el siguiente ejemplo en el que lo utilizamos para encontrar el círculo más pequeño que no deja fuera a la siguiente colección de puntos:



$$a_1 = (-3, 0)$$

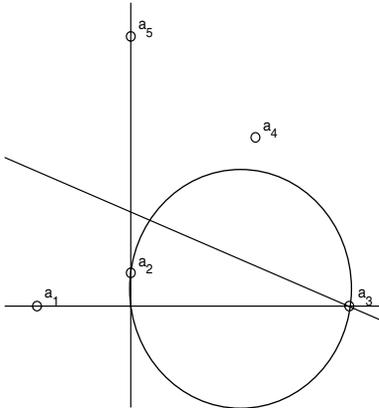
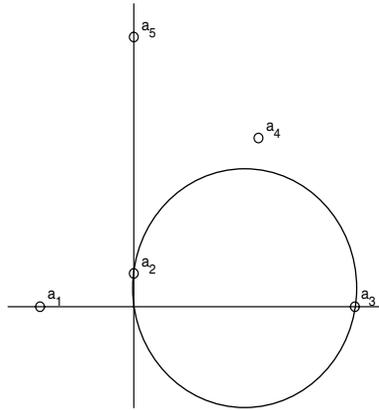
$$a_2 = (0, 1)$$

$$a_3 = (7, 0)$$

$$a_4 = (4, 5)$$

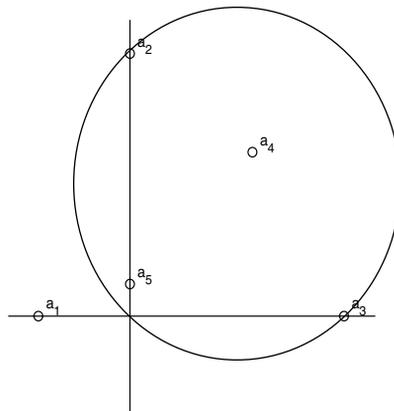
$$a_5 = (0, 8)$$

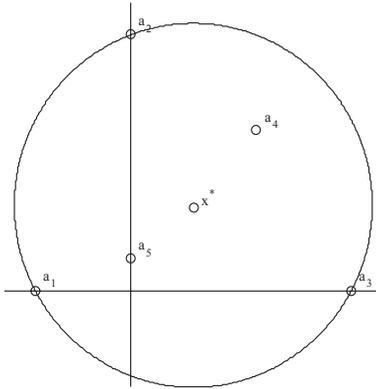
Empecemos nuestro algoritmo eligiendo los puntos  $a_2$  y  $a_3$ . Como se observa en la figura, el círculo cuyo diámetro une  $a_2$  y  $a_3$  no contiene a todos los puntos, con lo que elijamos un punto fuera de él, por ejemplo el  $a_4$  y pasemos al paso 3 del algoritmo. Puesto que el triángulo determinado por  $a_2$ ,  $a_3$  y  $a_4$  es acutángulo, utilicemos las igualdades anteriores para determinar su circuncentro.



Elijamos ahora el punto  $a_5$  que no está en este círculo. El punto de entre  $a_2$ ,  $a_3$  y  $a_4$  que está más alejado de él es  $a_3$ , por lo que, siguiendo las indicaciones del paso 4, hagamos  $b=a_3$  y tracemos la recta que extiende el diámetro de esta circunferencia que pasa por  $b$ . Puesto que  $a_2$  no está en el mismo semiplano que  $a_5$ , hagamos  $c=a_2$  y volvamos al paso 3 con  $a_5$ ,  $a_3$  y  $a_2$

Puesto que el triángulo determinado por  $a_5$ ,  $a_3$  y  $a_2$  no es acutángulo, intercambiamos los nombres de  $a_2$  y de  $a_5$  y volvamos al paso 2 con los puntos  $a_2$  y  $a_3$ . No todos los puntos están en el círculo cuyo diámetro une  $a_2$  y  $a_3$ . Elijamos como  $a_k$  el punto  $a_1$  y pasemos al paso 3 con los puntos  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$





Esto pone fin al algoritmo, puesto que el triángulo determinado por  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  es acutángulo y la circunferencia que pasa por ellos no deja fuera a ninguno de los puntos iniciales.

Así, utilizando las fórmulas anteriormente referidas, podemos afirmar que el menor círculo que no deja fuera a ninguno de los puntos  $a_i$  es el de centro  $\left(2, \frac{43}{16}\right)$  y radio  $\frac{\sqrt{8249}}{16}$

Para resolver el correspondiente problema ponderado, podemos encontrar en (Charalambous, 1982) un algoritmo basado en un procedimiento recursivo (que en el peor caso y para un número  $m$  de puntos concluye tras hacer  $\binom{m}{2} + \binom{m}{3}$  comprobaciones) y en el hecho de que si  $m \geq 4$  existe un subconjunto de 2 o de 3 puntos que es suficiente para determinar la solución. Ésta se encuentra en el lugar geométrico de los puntos que equidistan ponderadamente de dos de los puntos dados. Si los pesos correspondientes a esos dos puntos son iguales, ese lugar geométrico es la mediatriz correspondiente. Si los pesos son distintos, es una circunferencia de centro  $C$  y radio  $r$  siendo

$$C = \frac{w_i^2}{w_i^2 - w_j^2} \cdot a_i - \frac{w_j^2}{w_i^2 - w_j^2} \cdot a_j \quad ; \quad r = \frac{w_i \cdot w_j \cdot \|a_i - a_j\|}{|w_i^2 - w_j^2|}$$

Para dos puntos  $a_i$  y  $a_j$  con pesos asociados  $w_i$  y  $w_j$  respectivamente, la solución se encuentra en el segmento que los une y es el punto

$$\frac{w_1}{w_1 + w_2} \cdot a_1 + \frac{w_2}{w_1 + w_2} \cdot a_2$$

Para tres puntos  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  con pesos asociados  $w_1$ ,  $w_2$  y  $w_3$  respectivamente, o bien está determinada por dos de ellos (siendo la distancia ponderada entre la solución y el tercero, menor que las otras dos, y pudiéndose determinar como se ha comentado) o, en caso contrario:

- Si dos de los pesos son iguales (supongamos que los dos primeros) la solución está en la intersección de la mediatriz correspondiente a  $a_1$  y a  $a_2$  con la circunferencia correspondiente a  $a_1$  y a  $a_3$  (o con la correspondiente a  $a_2$  y a  $a_3$ )
- Si todos los pesos son distintos la solución está en la intersección de cualquiera de las dos circunferencias correspondientes.

Así, el algoritmo iterativo propuesto por Charalambous ha sido implementado en MATLAB a través de la rutina *charalam* (ver sección 7.4).

Para resolver la generalización de este problema, cuando se sustituye la norma euclídea por cualquiera de las normas  $p$  ( $p \geq 1$ ), en (Drezner y Wesolowsky, 1980b) podemos encontrar un método iterativo heurístico que, aunque es bastante rápido, no está exento de ciertos problemas de convergencia, como se comenta en el mismo trabajo.

#### 1.4. Un modelo para problemas de localización de un centro

En general, si queremos instalar un centro que preste servicios a los habitantes de las poblaciones situadas en los puntos  $a_1, a_2, \dots, a_m$  y si usando ciertas funciones decrecientes  $G_i$  definidas de  $\mathbb{R}^+$  en  $\mathbb{R}$  podemos medir, a través de  $G_i(\|x - a_i\|)$ , el grado de satisfacción de la  $i$ -ésima población  $a_i$  cuando el centro se sitúa en el punto  $x$ , entonces el problema de determinar su ubicación óptima se puede modelar como el de determinar los puntos que maximicen a la vez todos los valores de  $G_i(\|x - a_i\|)$ .

Sin embargo, esto no va a ser siempre posible puesto que si pensamos en dos poblaciones, desde el punto de vista de  $a_1$  la mejor ubicación será el propio  $a_1$ , mientras que para  $a_2$ , la mejor ubicación es  $a_2$ . Por esta razón se suele utilizar una función  $g$  que unifique coherentemente las expectativas de todas las poblaciones en una medida global. Así, este problema se transforma en el de encontrar los puntos que maximicen

$$g\left(G_1\left(\|x - a_1\|\right), G_2\left(\|x - a_2\|\right), \dots, G_m\left(\|x - a_m\|\right)\right)$$

Una de las políticas más utilizadas es aquella en la que el sentir de la sociedad al completo es la suma de las expectativas de cada población: la función que permite modelarla es

$$g_1(u_1, u_2, \dots, u_m) = u_1 + u_2 + \dots + u_m$$

Otra de esas políticas más comunes refleja el sentimiento de la sociedad a través de la satisfacción de su población menos satisfecha<sup>2</sup>. En este caso, la función que permite modelarla es

$$g_2(u_1, u_2, \dots, u_m) = \min\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$$

Si el grado de satisfacción de cada población es linealmente decreciente respecto a la distancia de la forma<sup>3</sup>

$$G_i(\|x - a_i\|) = v_i - w_i \cdot \|x - a_i\|$$

siendo  $w_i > 0$ , la primera de las políticas anteriores nos conduce al problema de encontrar los puntos que maximicen

$$\begin{aligned} g_1(G_1(\|x - a_1\|), G_2(\|x - a_2\|), \dots, G_m(\|x - a_m\|)) &= \\ &= \sum_{i=1}^m (v_i - w_i \cdot \|x - a_i\|) \end{aligned}$$

o equivalentemente, si las constantes  $v_i$  fuesen iguales, al de encontrar los puntos que minimicen

$$f_1(\|x - a_1\|, \|x - a_2\|, \dots, \|x - a_m\|) = \sum_{i=1}^m (w_i \cdot \|x - a_i\|)$$

que es la versión ponderada del problema de Weber, comentado anteriormente.

Bajo la misma hipótesis de linealidad, la segunda de las políticas transforma nuestro problema en el de encontrar los puntos que maximicen

$$\begin{aligned} g_2(G_1(\|x - a_1\|), G_2(\|x - a_2\|), \dots, G_m(\|x - a_m\|)) &= \\ = \min\{v_1 - w_1 \cdot \|x - a_1\|, v_2 - w_2 \cdot \|x - a_2\|, \dots, v_m - w_m \cdot \|x - a_m\|\} \end{aligned}$$

o equivalentemente, si las constantes  $v_i$  fuesen iguales, en el de encontrar los puntos que minimicen

<sup>2</sup> En concordancia con la idea de que el eslabón más débil es el que determina la fuerza de la cadena.

<sup>3</sup> Las constantes  $v_i$  las podemos interpretar como el grado de satisfacción de cada población cuando el centro se ubique sobre ella.

$$\begin{aligned} f_2(\|x - a_1\|, \|x - a_2\|, \dots, \|x - a_m\|) = \\ = \max\{w_1 \cdot \|x - a_1\|, w_2 \cdot \|x - a_2\|, \dots, w_m \cdot \|x - a_m\|\} \end{aligned}$$

que nos conduce al conocido problema “minimax”, que también ha sido comentado anteriormente.



## **CAPÍTULO II:**

### **PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN DE UN CENTRO NO DESEADO**



## Problemas de localización de un centro no deseado

Al contrario de los problemas expuestos en el capítulo anterior, ciertas características perjudiciales de algunos centros de servicios pueden hacer que las poblaciones colindantes tengan interés en que se ubique lo más lejos posible, como sucedería si el centro a instalar es, por ejemplo, potencialmente peligroso o altamente contaminante.

En tal caso, diremos que el centro a ubicar es no deseado, peligroso, detestable o nocivo y, evidentemente, convendría situarlo lo más lejos posible de las poblaciones colindantes o buscarle una ubicación que sea lo menos perjudicial posible. A este tipo de problemas los denominaremos problemas de localización de un centro no deseado y, utilizando la misma terminología, denominaremos problemas de localización de un centro deseado a los del capítulo anterior.

En los casos que nos van a ocupar aquí, consideraremos que el espacio de trabajo es  $\mathbb{R}^2$  sobre el que tenemos definida una norma  $\|\cdot\|$  y además, supondremos fijados  $m$  puntos  $a_1, a_2, \dots, a_m$  de dicho espacio que representarán la situación geográfica de ciertas poblaciones. Aunque la norma euclídea o la norma rectangular son las consideradas en las aplicaciones más clásicas, sería deseable no descartar ninguna otra que pudiera, llegado el caso, modelar las particularidades de otros problemas. Por ejemplo, si se trata de determinar la ubicación óptima de un vertedero de basura, las poblaciones colindantes se pueden ver afectadas por la presencia de malos olores arrastrados por los vientos dominantes en la zona. En localidades costeras, estos vientos soplan por la mañana desde el interior hacia el mar, mientras que por la tarde soplan en sentido contrario. Como en (Plastria, 1992b) o en (Ohsawa y Tamura, 2003), sería preferible utilizar, en este caso, una norma elíptica, siendo entonces la distancia entre la futura ubicación  $P = (x, y)$  y cada localidad  $a_i = (a_{i1}, a_{i2})$  la determinada por la expresión

$$\|P - a_i\| = \sqrt{\alpha \cdot (x - a_{i1})^2 + 2\gamma \cdot (x - a_{i1})(y - a_{i2}) + \beta \cdot (y - a_{i2})^2}$$

con  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  y  $\gamma < \alpha \beta$ , estimando los parámetros  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  en función de la dirección y fuerza del viento. Estas normas elípticas generalizan a la euclídea, siendo ésta el caso particular en el que  $\alpha = \beta = 1$  y  $\gamma = 0$

## 2.1. Un modelo para problemas de localización de un centro no deseado

En los problemas de localización de un centro no deseado, se hace necesaria la restricción de las posibles ubicaciones a los puntos de una región  $S$  cerrada y acotada puesto que, de no considerarse, sucedería que la ubicación óptima se encuentra al alejarnos indefinidamente del conjunto de puntos iniciales.

Al igual que en los modelos de localización de centros deseados, supongamos que con ciertas funciones decrecientes  $F_i$  definidas de  $\mathbb{R}^+$  en  $\mathbb{R}$  podemos medir, a través de  $F_i(\|x - a_i\|)$ , el grado de insatisfacción de la  $i$ -ésima población  $a_i$  cuando el centro se sitúa en el punto  $x$ . Así, el problema de determinar su ubicación óptima dentro de la región  $S$  se puede modelar como el de determinar los puntos de la región  $S$  que minimicen a la vez todos los valores de  $F_i(\|x - a_i\|)$ . Sin embargo, esto no va a ser siempre posible puesto que si pensamos en dos únicas poblaciones y consideramos que la región  $S$  es el segmento que las une, desde el punto de vista de la primera, la mejor ubicación será la segunda y viceversa. Por esta razón, al igual que en el capítulo anterior, también se suele utilizar una función  $g$  que unifique coherentemente las expectativas de todas las poblaciones en una medida global. Así, este problema se transforma en el de encontrar los puntos de la región  $S$  que minimicen

$$g\left(F_1\left(\|x - a_1\|\right), F_2\left(\|x - a_2\|\right), \dots, F_m\left(\|x - a_m\|\right)\right)$$

De nuevo, las dos políticas más utilizadas pueden ser modeladas a través de la función  $g_i(u_1, u_2, \dots, u_m) = u_1 + u_2 + \dots + u_m$  o bien a través de la función  $g(u_1, u_2, \dots, u_m) = \max\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$

Si el grado de insatisfacción de cada población es linealmente decreciente respecto a distancia de la forma  $F_i(\|x - a_i\|) = v_i - w_i \cdot \|x - a_i\|$  siendo  $w_i > 0$ , la primera de las políticas anteriores nos conduce al problema de encontrar los puntos de la región  $S$  que minimicen

$$\begin{aligned} g\left(F_1\left(\|x - a_1\|\right), F_2\left(\|x - a_2\|\right), \dots, F_m\left(\|x - a_m\|\right)\right) &= \\ &= \sum_{i=1}^m \left(v_i - w_i \cdot \|x - a_i\|\right) \end{aligned}$$

o equivalentemente, si las constantes  $v_i$  fuesen iguales, al de encontrar los puntos de la región  $S$  que maximicen

$$f_1(\|x - a_1\|, \|x - a_2\|, \dots, \|x - a_m\|) = \sum_{i=1}^m (w_i \cdot \|x - a_i\|)$$

que es el problema conocido como antiproblema de Weber o problema "maxisum".

Bajo la misma hipótesis anterior de linealidad, la segunda de las políticas transforma nuestro problema en el de encontrar los puntos de la región  $S$  que minimicen

$$\begin{aligned} &g_2(F_1(\|x - a_1\|), F_2(\|x - a_2\|), \dots, F_m(\|x - a_m\|)) = \\ &= \max \{v_1 - w_1 \cdot \|x - a_1\|, v_2 - w_2 \cdot \|x - a_2\|, \dots, v_m - w_m \cdot \|x - a_m\|\} \end{aligned}$$

o equivalentemente, si las constantes  $v_i$  fuesen iguales, en el de encontrar los puntos de la región  $S$  que maximicen

$$\begin{aligned} &f_2(\|x - a_1\|, \|x - a_2\|, \dots, \|x - a_m\|) = \\ &= \min \{w_1 \cdot \|x - a_1\|, w_2 \cdot \|x - a_2\|, \dots, w_m \cdot \|x - a_m\|\} \end{aligned}$$

que es conocido como antiproblema de Rawls o problema "maximin".

Al igual que para el problema "minimax", también se pueden dar interpretaciones geométricas para el problema "maximin", puesto que se puede probar su equivalencia con cualquiera de los siguientes:

- Dado un conjunto de puntos  $a_1, a_2, \dots, a_m$  y una región  $S \subset \mathbb{R}^2$ , determinar el círculo mayor cuyo centro está en  $S$  y no contiene a ninguno de los  $a_i$  en su interior (ver (Toussaint, 1983)).
- Dado un conjunto de puntos  $a_1, a_2, \dots, a_m$  y una región  $S \subset \mathbb{R}^2$ , determinar el mínimo radio que nos permite cubrir toda la región  $S$  con  $m$  círculos iguales centrados en cada uno de los puntos  $a_i$  (ver (Dasarathy y White, 1980)).

Aunque, si queremos decidir la ubicación óptima para un centro deseado, parece que el modelo más idóneo es el "minisum", para centros no deseados y teniendo en cuenta únicamente aspectos medioambientales, el modelo "maxisum" puede conducir a soluciones que no sean suficientemente aceptables para todas las poblaciones. Sin embargo, el criterio "maximin" parece ser el más idóneo, ya que con él se intenta minimizar el daño infringido a la población más afectada. Para poner de manifiesto las diferencias entre ambos consideremos el siguiente ejemplo unidimensional propuesto en (Brimberg y Juel, 1998):

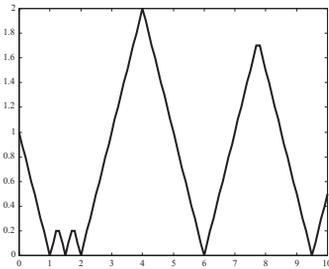
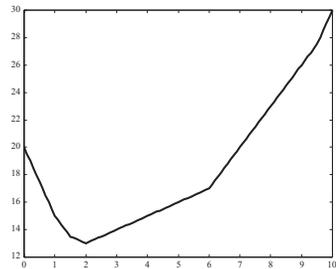
Supongamos que queremos ubicar un centro no deseado en el segmento  $[0,10]$  dentro del cual existen 5 poblaciones equiponderadas situadas en los puntos  $a_1 = 1, a_2 = 1,5, a_3 = 2, a_4 = 6$  y  $a_5 = 9,5$



El modelo "maxisum" persigue maximizar, en el intervalo  $[0,10]$ , la función

$$f_1(x) = |x - 1| + |x - 1.5| + |x - 2| + |x - 6| + |x - 9.5|$$

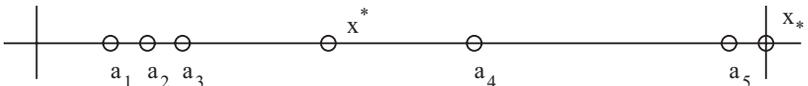
El máximo, que se alcanza en el punto  $x_* = 10$ , está intolerablemente cerca de la última población: a distancia 0,5



Sin embargo, en el modelo "maximin" la función a maximizar es

$$f_2(x) = \min \{ |x - 1|, |x - 1.5|, |x - 2|, |x - 6|, |x - 9.5| \}$$

cuyo máximo en el punto  $x^* = 4$  hace que la distancia a cualquiera de las poblaciones nunca sea menor que 2.



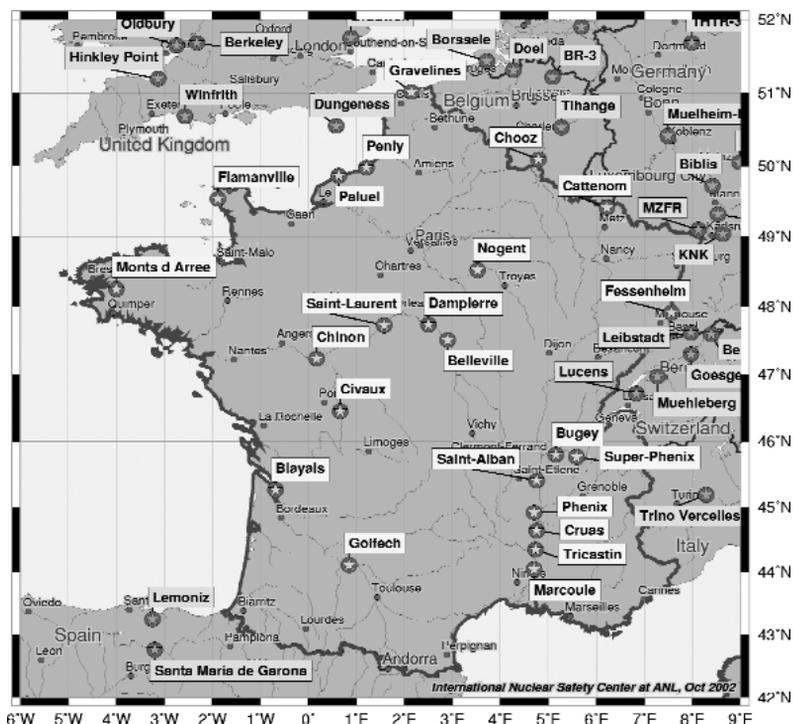
## 2.2. Perspectiva histórica y trabajos existentes

A partir de la segunda mitad del siglo XX y como consecuencia de la Revolución Industrial, empezaron a proliferar centros de servicio o de almacenamiento con consecuencias negativas para la salud, el medio ambiente o nuestro propio bienestar, estilo y calidad de vida: por ejemplo, centrales nucleares, cementerios de residuos tóxicos o radioactivos, fábricas contaminantes ambiental o acústicamente, plantas de tratamiento de desechos de centros urbanos (vertederos), o incluso cualquier otro tipo de instalaciones que generan, por parte de

las poblaciones colindantes, un rechazo colectivo tan pronto como son conocedoras de su posible ubicación (como por ejemplo, cárceles, centros para el tratamiento y rehabilitación de personas drogodependientes...). De hecho, aunque los principios de la teoría de la localización los podemos situar en el siglo XVII (como ya hemos comentado en el capítulo anterior), la mayoría de los trabajos se han realizado en los últimos 40 años y no es hasta finales de los años 70 cuando aparecen los primeros trabajos sobre localización de centros peligrosos, coincidiendo con una mayor concienciación y sensibilización social hacia este tipo de problemas.

Quizá la primera aplicación de este tipo de problemas (como se cita en (Hansen et al., 1981)) parta de la situación conflictiva que se generó en el mes de junio del año 1980, cuando el gobierno belga presentó una protesta formal al gobierno francés en contra de la construcción de varias centrales nucleares a lo largo de la frontera entre ambos países: en concreto las de Gravelines, Chooz y Cattenom.

En la figura se muestran todas las centrales nucleares francesas (muchas de ellas con varios reactores activos), junto con algunas de sus países vecinos. De ella, destacamos la ubicación de las ya citadas y también las situadas en los límites del país (en la costa del Mar del Norte: además de la propia



Gravelines, Penly, Paluel, Flamanville y Monts d'Arree) y otras ubicadas en zonas de una baja densidad de población y suficientemente lejos de ciudades importantes, como las situadas al sur de París (Chinon, Saint-Laurent, Dampiere y Belleville) o las del sureste del país, en las profundidades del montañoso macizo central y a lo largo del río Ródano (Marcoule, Tricastin, Cruas, Saint-Alban, Bugey, Phenix y Super-Phenix).

Una amplia colección de trabajos consideran la hipótesis adicional de que la región, dentro de la cual se debe ubicar el centro no deseado, sea poligonal: esta hipótesis no es tan restrictiva como pueda pensarse en un principio, puesto que en cualquier base de datos geográfica o cartográfica (de entre las que podemos destacar, a nivel nacional, las existentes en el Instituto Geográfico Nacional<sup>4</sup> o en el Centro Nacional de Información Geográfica<sup>5</sup>, y a nivel internacional, el Digital Chart of the World<sup>6</sup>) las fronteras administrativas las podemos encontrar así descritas. Esta hipótesis es una clara consecuencia de la fuerte componente geográfica de este tipo de problemas, dejando al margen consideraciones de otra índole (por ejemplo, económicas o políticas) que aunque reflejarían con mayor exactitud los problemas reales, también harían que nuestro modelo fuera menos manejable.

En (Hansen et al., 1981) se aborda el problema de la localización de un centro no deseado teniendo en cuenta la posibilidad de optar por cualquiera de las políticas mencionadas. En él se abordan tanto el problema "maxisum" como el "maximin" y en ambos casos se trabajan con normas cualesquiera, imponiendo la condición de que  $S$  sea un subconjunto cerrado y acotado de  $\mathbb{R}^2$ . En él se utiliza el concepto de "punto remoto" y se presentan algoritmos para sus resoluciones.

Otro tratamiento simultáneo de estos dos problemas se puede encontrar en (Melachrinoudis y Culliane, 1986). En él se consideran los correspondientes problemas cuando se utilizan las normas euclídea y rectangular, siendo  $S$  una región poligonal del plano. Para la primera de las normas, se obtiene que, si la solución al problema "maximin" está en el interior del conjunto, entonces equidista ponderadamente de tres de los puntos iniciales y, si la solución se encuentra en la frontera, o es un vértice de  $S$  o equidista ponderadamente de dos de los puntos iniciales. En el caso de la norma rectangular, se tratan de forma especial los lados del polígono que forman  $\pm 45$  grados con los ejes de coordenadas. Para el criterio "maxisum", puesto que la correspondiente función a maximizar es convexa, se puede delimitar más el conjunto de posibles soluciones, reduciéndolo al conjunto finito formado por los vértices de la envolvente convexa de  $S$ .

<sup>1</sup> Desde su página web <http://www.mfom.es/ign> podemos tener acceso a la base de datos que contiene las líneas límite de la división administrativa española, tanto a nivel autonómico, como provincial o municipal.

<sup>2</sup> Sección dependiente del organismo anterior en el que, además de los datos correspondientes a la división territorial, también podemos obtener una amplia colección de datos cartográficos desde la dirección <http://www.cnig.ign.es>

<sup>3</sup> Los límites administrativos de los países que se pueden obtener ahí se encuentran sin actualizar desde 1992 y vienen descritos a través de las coordenadas de latitud y longitud referidas al esferoide Clarke1866. Su dirección web es <http://www.maproom.psu.edu/dcw>

Además de (Hansen et al., 1981), también es referencia obligada al problema "maximin" el trabajo (Dasarathy y White, 1980) que, junto con aquél, ha constituido el punto de partida de esta línea de investigación. En éste último se resuelve el problema "maximin" sin pesos en  $\mathbb{R}^n$  considerando la norma euclídea y  $S$  una región convexa, acotada y poliédrica. Se enumeran los óptimos locales utilizando las condiciones de Kuhn-Tucker y se genera, a partir de un algoritmo combinatorio, un conjunto finito de puntos candidatos a ser solución, construyendo un algoritmo que adapta, al caso  $n$ -dimensional, los resultados obtenidos en (Shamos, 1975) y (Shamos y Hoey, 1975). Además, utilizando el diagrama de Voronoi, presentan un algoritmo alternativo para el caso bidimensional.

Generalizando estos resultados al problema ponderado, de entre los múltiples trabajos correspondientes al problema "maximin", que se restringen al espacio  $\mathbb{R}^2$  considerando la norma euclídea, podemos destacar los siguientes:

- En (Drezner y Wesolowsky, 1980a) se considera que las posibles ubicaciones deben estar, a lo sumo, a una distancia predeterminada para cada localidad afectada y se propone un algoritmo que conduce a su solución. El caso contrario, en el que el centro a construir deba estar fuera de una región de exclusión alrededor de cada localidad y dentro de un polígono no necesariamente convexo, se puede encontrar en (Melachrinoudis y Culliane, 1985) un algoritmo de resolución que es una modificación del presentado en (Dasarathy y White, 1980).
- Si consideramos que la región  $S$  es poligonal, en (Melachrinoudis, 1985) se prueba, a través de las condiciones de Kuhn-Tucker, que los óptimos se encuentran en los vértices de la envolvente convexa de  $S$ , en sus lados equidistando ponderadamente de dos puntos dados o en su interior equidistando ponderadamente de tres, obteniendo así los mismos resultados que en (Dasarathy y White, 1980) para el caso bidimensional cuando la región  $S$  es convexa.
- Eliminando la condición de convexidad de la región poligonal  $S$  y denotando por  $n$  el número de sus lados y por  $m$  el número de poblaciones afectadas, podemos encontrar en (Melachrinoudis y MacGregor Smith, 1995) un algoritmo de orden  $nm^2$  para resolver el problema, basado en el diagrama de Voronoi con pesos.
- Aunque una asignación natural para los pesos asociados a cada población en el problema "maximin" puede ser inversamente proporcional al número de sus habitantes de cada población (puesto que al decrecer el peso asociado a una población concreta, aumenta la oposición, ya que la presencia de su contribución en el modelo es mayor), en (Erkut y Öncü, 1991) se puede encontrar un estudio paramétrico de ellos, que aumenta las posibilidades de elegir los pesos, proporcionando una mayor riqueza al modelo.

- Otro enfoque del problema "maximin" con pesos utilizando la norma euclídea y bajo la condición de que la región  $S$  sea una poligonal convexa, se puede encontrar en (Fernández Palacín, 1994), donde se impone la condición de que las poblaciones afectadas estén protegidas por regiones poligonales convexas, entendiéndose éstas como regiones prohibidas dentro de las cuales no está permitida la construcción de una instalación nociva.

Utilizando la norma rectangular, podemos encontrar en (Drezner y Wesolowsky, 1983), dos algoritmos de resolución para el problema "maximin" en una región poligonal  $S$ : uno de ellos se basa en una búsqueda binaria desde un punto de vista geométrico y el otro utiliza la programación lineal en las subregiones que se obtienen al particionar  $S$ .

En (Saameño Rodríguez, 1992) se presenta un modelo general con pesos para resolver una familia de problemas de localización de centros no deseados (entre los que se encuentran los ya comentados "maximin" y "maxisum") dentro de un conjunto poligonal para una norma cualquiera. Cuando se particulariza este modelo para la norma euclídea y considerando los pesos iguales, se obtienen de nuevo los resultados que se presentan en (Dasarathy y White, 1980) y en (Hansen et al., 1981). Se presenta una continuación de este trabajo en (Muñoz Pérez y Saameño Rodríguez, 1999), en el que se utiliza dicho modelo general para el problema sin pesos correspondiente a la norma euclídea, y se tiene en cuenta la posible existencia de regiones poligonales prohibidas.

Este modelo, que se retomará aquí, también es la base del artículo (Guerrero García et al., 2003), presentado en el XXVII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, en el que se generalizan los resultados presentados en (Muñoz Pérez y Saameño Rodríguez, 1999) para el problema ponderado planteado en términos de cualquier norma.

Volviendo a echar una mirada atrás sobre la realidad que intentamos modelar, también podría suceder que el centro a situar fuese deseado para algunas de las poblaciones y no deseado para otras. Por ejemplo, si algunas de las poblaciones fuesen eminentemente residenciales (por ejemplo, localidades enfocadas al sector turístico o tales que la mayoría de su población fuese veraneante) es lógico pensar que su interés sea que el futuro emplazamiento de una fábrica sea lo más alejado de ellas. Sin embargo, podemos pensar que existe un deseo de proximidad en aquellas otras poblaciones que dependen del funcionamiento de esa hipotética fábrica (así se minizarían las distancias que tienen que recorrer los habitantes que trabajen en ella o los costes económicos que se derivan del traslado de los productos manufacturados a las poblaciones que los ofertan o de las materias primas que la proveen). Este nuevo punto de vista se puede incluir en el modelo permitiendo la presencia de pesos positivos y negativos en las correspondientes componentes locales que serán englobadas en la política global de la comunidad.

El problema "maxisum" ampliado al caso en el que existan pesos positivos y negativos, tomando como región  $S$  todo el plano y utilizando las  $p$ -normas se puede encontrar en (Drezner y Wesolowsky, 1991), donde también se presenta una modificación del algoritmo de Weiszfeld para esos casos.

Además de ese trabajo, de entre los más relevantes que se sitúan dentro de esta línea de investigación, en la que podemos hablar de centros "semideseados" y en la que se conjugan ambos sentimientos, destacamos los siguientes:

- En (Velasco Morente, 1991) se aborda el problema "maximin" con pesos, considerando la posibilidad de que el centro a instalar pueda ser deseado para algunas poblaciones y no deseado para otras. La metodología utilizada se basa en algoritmos genéticos, bajo la hipótesis de que la región factible es unión de polígonos convexos y en los casos particulares en los que la función objetivo venga expresada en términos de la norma  $\|\cdot\|_2$ ,  $\|\cdot\|_2^2$  y de la  $\|\cdot\|_1$ .
- En (Romero Morales et al., 1997) se hace una crítica de los modelos habituales de localización en los que sólo se tiene en cuenta el impacto medioambiental, pero se ignora la componente económica, pudiendo así conducir a ubicaciones tan alejadas de los centros afectados que la interacción entre ambos hace que se disparen los costes de tal decisión. Por ello, proponen un modelo que conjuga ambos puntos de vista: la componente medioambiental se introduce a través de una función decreciente con la distancia y la componente económica, a través de una función creciente con la distancia. El problema de determinar un punto dentro de una región cerrada y acotada que haga mínima la suma de ambas se resuelve con el método BSSS (comentado más adelante) y se ejemplifica a través de una colección de problemas, siendo las funciones allí utilizadas  $w_i \cdot e^{-\|x-a_i\|}$  para el impacto medioambiental y  $w_i \cdot \|x - a_i\|$  para el económico.
- En (Brimberg y Juel, 1998) se trabaja en una línea similar: desde el punto de vista medioambiental, se intentarán minimizar los daños y, desde el punto de vista económico, se intentarán minimizar los costes de transporte de las mercancías a los centros considerados. Si sólo consideramos el primero de los prismas, los criterios habituales conducen a los problemas "maximin" y "maxisum"; sin embargo, se comenta que puede conducir a soluciones que, intuitivamente, pueden no parecer óptimas, por lo que se propone utilizar como

medida de este coste  $\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{\|x - a_i\|^b}$ , siendo  $b$  una constante posi-

tiva. Puesto que la componente económica se puede medir a través de  $\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{\|x - a_i\|^b}$ , se construye un modelo que conjuga de forma

convexa ambos y se resuelve computacionalmente a través de la generalización del método BSSS.

- En (Plastria y Carrizosa, 1999) se construye otro modelo bicriterio con el que se intenta conseguir que el daño infringido a la sociedad sea el menor posible. Para ello se tiene en cuenta que una población se podría ver afectada por un desastre si está dentro del círculo de influencia del centro peligroso y, en tal caso, el daño ocasionado decrece en función de la distancia euclídea. Así, se persigue tanto reducir el daño social a través de la suma de los daños ponderados a las posibles poblaciones afectadas, como incrementar el nivel de seguridad haciendo que el radio de acción sea lo mayor posible dentro de los límites establecidos. Este problema se resuelve a través de un conjunto de círculos eficientes; además, en este artículo se construye una curva que relaciona sus radios con el daño que se pudiera generar.
- En (Fernández et al., 2000) se propone, como medida del daño medioambiental infringido a los habitantes de la  $i$ -ésima población, el empleo de la función  $\frac{1}{1 + e^{\alpha_i + \beta_i \cdot \|x - a_i\|}}$ . El parámetro  $\alpha_i$  mide el grado de repulsión si el centro se instalara sobre ella (el parámetro es menor cuanto mayor sea el grado de repulsión),  $\beta_i$  indica la rapidez con la que las distancias pasan a ser aceptables para sus habitantes y el modelo construido es la suma ponderada de estas funciones.

Destaquemos, por último, tres trabajos en los que se proponen algoritmos generales para la resolución de los problemas de localización objeto de nuestro estudio:

- Como se ha comentado anteriormente, en (Hansen et al., 1981) se presenta un algoritmo de resolución de problemas de localización conocido como BSSS (Big Square Small Square), utilizando cualquier norma y siendo la región factible unión finita de polígonos convexos. Consiste en la partición secuencial de un cuadrado inicial, cuyos lados sean paralelos a los ejes de coordenadas y que contenga a la región factible, en cuatro nuevos cuadrados, y en la evaluación de la función objetivo a optimizar en los centros de dichos cuadrados, poniendo fin al algoritmo cuando se alcance determinado nivel de tolerancia. Aunque desarrollado originalmente en (Hansen y Thisse, 1981) para resolver el problema de Weber, también es aplicable a problemas de localización de centros no deseados, y así, en nuestra misma línea de investigación, desde nuestro Departamento se han dirigido varios proyectos de Fin de Carrera en los que se aplica este algoritmo a la búsqueda de soluciones de los problemas que plantearemos más adelante y se compara su coste computacional con el del algoritmo que se obtiene a partir de los resultados que se presentan en este trabajo.

- En (Plastria, 1992a) se plantean dudas acerca de la convergencia del algoritmo BSSS en ciertos casos degenerados. Concretamente, en el caso en el que el centro de ningún cuadrado de los allí propuestos pertenezca a la región factible la convergencia podría verse comprometida puesto que, en el trabajo anterior, sólo se realiza la evaluación del centro de un cuadrado si dicho punto pertenece a la región factible. Por ello, se construye un algoritmo generalizado, denominado GBSSS (Generalized Big Square Small Square) sustituyendo de forma natural los cuadrados por rectángulos y en el que se obliga a que la función objetivo se evalúe al menos una vez en cada uno de ellos.

Puesto que los autores observan que en esta generalización la lista de los rectángulos construidos es más compleja que la sencilla del algoritmo BSSS original (aunque también es cierto que la original puede conducir a más divisiones innecesarias), además de incluir una fase de "garbage collection", en cada paso se elige el rectángulo a dividir, tomando la opción más prometedora y únicamente se divide el seleccionado.

- Otro trabajo en el que aparece el algoritmo BSSS original es (Hansen et al., 1985), en el que se presenta una especificación para resolver el problema de Weber, eliminando en cada iteración aquellos cuadrados de la región factible que no superen determinado test de "optimalidad", aliviando en cierta forma, la sobrecargada lista de cuadrados del algoritmo original. Sorprendentemente, también podemos encontrar en este trabajo un comentario de los autores en el que justifican la decisión de no tener en cuenta las sugerencias de dos revisores acerca de la posibilidad de utilizar triángulos en vez de cuadrados: prefieren mantener la construcción original puesto que el test no consume demasiado tiempo (al contrario de la opinión de Plastria en el trabajo del párrafo anterior) y, en el caso de optar por esa nueva construcción, la cota inferior utilizada para el citado test sería más difícil de determinar.

La utilización de triángulos en vez de cuadrados para un algoritmo del mismo tipo que el BSSS, es la base del artículo (Drezner y Suzuki, 2004), en el que se presenta un algoritmo, que los autores denominan BTST (Big Triangle Small Triangle), basado en la triangularización de Delaunay (dual del diagrama de Voronoi) y que utilizan para resolver tanto un problema de localización de un centro no deseado (en el que la función objetivo es la suma ponderada de magnitudes inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia) como para el problema de Weber con pesos positivos y negativos que aparece en (Drezner y Wesolowsky, 1991). Para el primer problema construyen, no una, sino dos cotas inferiores (aunque la segunda es mejor en muchas ocasiones, la primera es más fácil de calcular, por lo que sugieren que se utilice como cota infe-

rior el máximo de las dos). Para el segundo problema construyen sólo una pero, en cualquier caso, el algoritmo propuesto tiene las siguientes ventajas respecto a los anteriores: por un lado, la triangulación constituye una partición de la región factible cuando ésta es poligonal, con lo que se puede obviar el tedioso y costoso test de factibilidad; por otro lado, las cotas de los algoritmos son adecuadas cuando ninguno de los puntos dados pertenece al interior de las celdas de cada iteración, premisa que se tiene garantizada utilizando la triangulación de Delaunay y, en general, no se verifica ni para el BSSS ni para el GBSSS.

- Destaquemos también, la posibilidad de encontrar en la web una colección de implementaciones de algoritmos de localización (recogidos bajo el nombre *Library Of Location Algorithm (LOLA)*<sup>4</sup>), dentro de la página dependiente de la alemana Universidad de Kaiserslautern.

Tras esta breve descripción de los artículos más relevantes relacionados con nuestra línea de investigación (se puede encontrar una clasificación más extensa en (Lozano y Mesa, 2000)), en los siguientes capítulos vamos a recoger los resultados de (Saameño Rodríguez, 1992) para normas cualquiera y, sin particularizar para la norma euclídea, generalizamos los resultados de (Dasarathy y White, 1980) para resolver una colección de problemas de localización de centros no deseados con pesos, en una región poligonal y utilizando cualquier norma, obteniendo una notable reducción de la región inicial a un conjunto de puntos, dentro del cual podemos afirmar que se encuentra la solución de toda esa familia de problemas de localización de centros no deseados, permitiéndonos así una gran flexibilidad a la hora de optar, a posteriori, por cualquiera de las políticas que nuestro modelo recoge, estando entre ellas las ya habituales de "maxisum" y "maximin".

---

<sup>4</sup> En la dirección <http://www.mathematik.uni-kl.de/lola/>

## **CAPÍTULO III:**

### **UNA PRIMERA DEPURACIÓN DE PUNTOS CANDIDATOS**



## Una primera depuración de puntos candidatos

Ante la necesidad de instalar un centro no deseado que repercutirá en una colección de poblaciones representadas por los puntos  $a_1, a_2, \dots, a_m$  del plano, el interés de cada una será que se ubique lo más lejos posible de ella, lo que nos sitúa ante un problema de decisión multicriterio. Como ya se ha comentado, en general, no podemos satisfacer las expectativas de todas y cada una de las poblaciones, y en tales ocasiones, nos veremos obligados a utilizar alguna política que nos permita encontrar alguna solución de compromiso.

A cualquier política aceptable que nos permita alcanzar un consenso entre las poblaciones afectadas, parece lógico exigirle que respete la condición de que si un punto  $x$  está más alejado de todos los puntos  $a_i$  que otro punto  $y$  (es decir que  $d(x, a_i) \geq d(y, a_i)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ ), el primero es preferible al segundo como ubicación para un centro no deseado.

En (Kuhn, 1967) y en (Wendell y Hurter, 1973) se presenta el concepto de dominancia, enfocado a resolver el problema de Weber observando que, si  $d(x, a_i) \geq d(y, a_i)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ , el punto  $y$  es preferible a  $x$  como ubicación para un centro deseado. Por esta razón, comenzaremos este capítulo, modificando convenientemente esa definición para utilizarla de forma efectiva en nuestro modelo.

### 3.1. Dominancia

Teniendo en cuenta que trabajaremos únicamente con distancias que provienen de normas, y que, además, queremos modelar este tipo de problemas a través del estudio de los máximos en cierta región  $S$  cerrada y acotada de una función adecuada

$$f(\|x - a_1\|, \|x - a_2\|, \dots, \|x - a_m\|)$$

la condición anterior la podemos imponer al exigirle a la función  $f$  que satisfaga la propiedad recogida en la siguiente definición:

**Definición 1.** Una función  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  diremos que es **isótona** si para todo par  $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$ ,  $z^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_m^*)$  de elementos de  $\mathbb{R}^m$  tales que  $z_i \leq z_i^*$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ , se cumple que  $f(z) \leq f(z^*)$ .

Así, nuestro problema de localización de un centro no deseado lo podemos modelar a través del de determinar el punto o los puntos de la región  $S$  en los que se alcanza el máximo de  $f(\|x - a_1\|, \|x - a_2\|, \dots, \|x - a_m\|)$ , siendo  $f$  una función isótona que vendrá especificada por alguna política coherente diseñada por la entidad gestora de los intereses de las poblaciones consideradas.

En primer lugar, podemos eliminar como ubicaciones aceptables, aquellas para las que existe otro punto que es preferible para todas las poblaciones afectadas. Esta condición queda expresada en la siguiente definición:

**Definición 2.** Dada una norma  $\|\cdot\|$  sobre  $\mathbb{R}^2$ , una colección  $P_1, P_2, \dots, P_m$  de puntos del plano y dos puntos  $x, y \in \mathbb{R}^2$  diremos que  **$y$  está dominado por  $x$**  o que  **$x$  domina a  $y$**  (y lo notaremos por  $y \preceq x$ ) si

$$\|y - P_i\| \leq \|x - P_i\| \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, m$$

Aunque la relación  $\preceq$  es un preorden en  $\mathbb{R}^2$ , ni es total, ni es de orden, como se puede observar a la vista de los siguientes ejemplos:

### EJEMPLO 1

Para comprobar que la relación  $\preceq$  no es total, basta considerar como puntos  $P_1 = (0,0)$  y  $P_2 = (3,0)$  y utilizar la norma euclídea. Los puntos  $A = (1,0)$  y  $B = (2,0)$  no son comparables, puesto que

$$A \not\preceq B \text{ ya que } \|A - P_2\| > \|B - P_2\|$$

$$B \not\preceq A \text{ ya que } \|B - P_1\| > \|A - P_1\|$$

### EJEMPLO 2

De la misma forma, podemos comprobar que la relación  $\preceq$  no es antisimétrica, sin más que considerar un único punto  $P_1 = (0,0)$  y comprobar que, siendo  $A = (-1,0)$  y  $B = (1,0)$ , para la norma euclídea se cumple que

$$\|A - P_1\| \leq \|B - P_1\| \quad , \quad \|B - P_1\| \leq \|A - P_1\|$$

y, sin embargo,  $A \neq B$

Esta definición nos va a permitir eliminar ciertos puntos observando que si  $y \in \mathbb{R}^2$  está dominado por algún otro  $x \in \mathbb{R}^2$ , entonces  $y$  no es interesante para la instalación de un centro no deseado, con lo que lo podemos obviar a la hora de buscar las posibles ubicaciones óptimas.

### 3.2. Dominancia en la envolvente convexa

Abstrayéndonos de cualquier problema de localización, estudiemos el comportamiento del concepto de dominancia para una norma arbitraria sobre  $\mathbb{R}^2$ .

Tomemos como punto de partida la siguiente definición extraída de la geometría fundamental euclídea:

**Definición 3.** Si  $P_1$  y  $P_2$  son dos puntos distintos de  $\mathbb{R}^2$ , diremos que otro punto  $P$  está **alineado** con ellos si existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $P = P_1 + \lambda \cdot (P_2 - P_1)$

Por otra parte, dados  $m$  puntos  $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  de  $\mathbb{R}^2$ , denotaremos por  $[P_1, P_2, \dots, P_m]$  a su envolvente convexa; es decir, al conjunto

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2; x = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot P_i \text{ siendo } \lambda_i \geq 0 \text{ con } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}$$

Es evidente que si  $P \in [P_1, P_2]$ , entonces  $P$  está alineado con  $P_1$  y  $P_2$

Pongamos de manifiesto dos resultados que serán utilizados más adelante, pudiéndose deducir el primero de ellos directamente de la definición:

**Proposición 3.2.1.** Si  $P_1$  y  $P_2$  son dos puntos distintos de  $\mathbb{R}^2$ , cualquier punto  $x \in \mathbb{R}^2$  está alineado con ellos si, y sólo si, existe  $Q \in \mathbb{R}^2$ ,  $Q \neq 0$  y existe  $k \in \mathbb{R}$  tales que la función  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $F(P) = \langle P, Q \rangle + k$  cumple que  $F(P_1) = 0$ ,  $F(P_2) = 0$ ,  $F(x) = 0$ , siendo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto escalar usual en  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposición 3.2.2.** Dados dos puntos distintos  $P_1, P_2$  de un espacio vectorial normado  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ , para todo  $y \in [P_1, P_2]$  se cumple que

$$\|y - P_1\| + \|y - P_2\| = \|P_1 - P_2\|$$

*Demostración:*

Puesto que  $y \in [P_1, P_2]$  sabemos que existe algún valor  $\alpha \in [0, 1]$  tal que  $y = \alpha \cdot P_1 + (1 - \alpha) \cdot P_2$ , luego

$$\begin{aligned} \|y - P_1\| + \|y - P_2\| &= \|\alpha \cdot P_1 + (1 - \alpha) \cdot P_2 - P_1\| + \|\alpha \cdot P_1 + (1 - \alpha) \cdot P_2 - P_2\| = \\ &= \|(1 - \alpha) \cdot (P_2 - P_1)\| + \|\alpha \cdot (P_1 - P_2)\| = (1 - \alpha) \|P_1 - P_2\| + \alpha \|P_1 - P_2\| = \\ &= \|P_1 - P_2\| \end{aligned}$$

■

Aunque, en relación con el comportamiento de la dominancia, algunos de los siguientes resultados son conocidos, hemos creído conveniente exponerlos aquí aportando, en algunos casos, demostraciones alternativas de carácter constructivo de más utilidad en implementaciones algorítmicas. Así, para llegar a

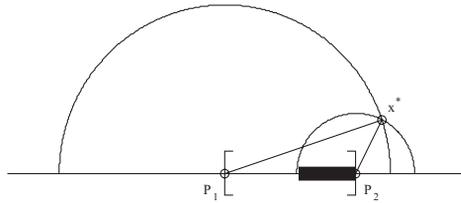
un resultado general en relación con el comportamiento de la dominancia en la envolvente convexa de puntos dados, partiremos de dos únicos puntos y construiremos un esquema de demostración sobre el que nos apoyaremos en sucesivas generalizaciones.

**Proposición 3.2.3.** *Dados dos puntos distintos  $P_1, P_2$  de un espacio vectorial normado  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ , para cada  $x \in \mathbb{R}^2$  existe un segmento  $I$ , que en ocasiones puede estar reducido a un único punto, contenido en  $[P_1, P_2]$  tal que para todo  $y \in I$  se cumple que  $y \preceq x$ , es decir*

$$\|y - P_1\| \leq \|x - P_1\| \text{ y además } \|y - P_2\| \leq \|x - P_2\|$$

*Demostración:*

Aunque se pueden hacer varias demostraciones de esta proposición, hemos optado aquí por ofrecer una, basada en la construcción de la figura.



Para ello, consideremos los valores

$$\alpha_1 = \max \left\{ 0, 1 - \frac{\|x - P_1\|}{\|P_1 - P_2\|} \right\}, \quad \alpha_2 = \min \left\{ 1, \frac{\|x - P_2\|}{\|P_1 - P_2\|} \right\}$$

y el conjunto  $I = \{\alpha \cdot P_1 + (1 - \alpha) \cdot P_2, \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2\}$  que es un subconjunto de  $[P_1, P_2]$ .

- Veamos que  $I \neq \emptyset$ , observando que  $\alpha_2 - \alpha_1 \geq 0$ . Puesto que

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \max \left\{ 0, 1 - \frac{\|x - P_1\|}{\|P_1 - P_2\|} \right\} = \max \left\{ 1 - 1, 1 - \frac{\|x - P_1\|}{\|P_1 - P_2\|} \right\} = \\ &= 1 - \min \left\{ 1, \frac{\|x - P_1\|}{\|P_1 - P_2\|} \right\} \end{aligned}$$

habremos concluido esta primera parte si comprobamos que

$$\min \left\{ 1, \frac{\|x - P_2\|}{\|P_1 - P_2\|} \right\} + \min \left\{ 1, \frac{\|x - P_1\|}{\|P_1 - P_2\|} \right\} \geq 1$$

Puesto que la desigualdad es evidente si alguno de los mínimos es 1, centrémonos únicamente en el caso en el que

$$\min \left\{ 1, \frac{\|x - P_1\|}{\|P_1 - P_2\|} \right\} = \frac{\|x - P_1\|}{\|P_1 - P_2\|}$$

$$\min \left\{ 1, \frac{\|x - P_1\|}{\|P_1 - P_2\|} \right\} = \frac{\|x - P_1\|}{\|P_1 - P_2\|}$$

Por las propiedades de las normas, podemos asegurar que

$$\|P_1 - P_2\| = \|P_1 - x + x - P_2\| \leq \|x - P_1\| + \|x - P_2\|$$

con lo que la desigualdad resulta evidente, sin más que dividir la desigualdad anterior por  $\|P_1 - P_2\|$

- Veamos que cualquier  $y \in I$  cumple que

$$\|y - P_1\| \leq \|x - P_1\| \quad \text{y además} \quad \|y - P_2\| \leq \|x - P_2\|$$

Para ello, tomemos  $\alpha$  tal que  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$  y consideremos el punto  $y = \alpha \cdot P_1 + (1 - \alpha) \cdot P_2$

Puesto que  $\alpha \geq \alpha_1 \geq 1 - \frac{\|x - P_1\|}{\|P_1 - P_2\|}$ , entonces  $1 - \alpha \leq \frac{\|x - P_1\|}{\|P_1 - P_2\|}$

Así, la primera de las desigualdades se verifica, puesto que

$$\begin{aligned} \|y - P_1\| &= \|\alpha \cdot P_1 + (1 - \alpha) \cdot P_2 - P_1\| = (1 - \alpha) \cdot \|P_1 - P_2\| \leq \\ &\leq \frac{\|x - P_1\|}{\|P_1 - P_2\|} \cdot \|P_1 - P_2\| \leq \|x - P_1\| \end{aligned}$$

Por otra parte, como  $\alpha \leq \alpha_2 \leq \frac{\|x - P_2\|}{\|P_1 - P_2\|}$ , la segunda de las desigualdades también se verifica, puesto que

$$\begin{aligned} \|y - P_2\| &= \|\alpha \cdot P_1 + (1 - \alpha) \cdot P_2 - P_2\| = \alpha \cdot \|P_1 - P_2\| \leq \\ &\leq \frac{\|x - P_2\|}{\|P_1 - P_2\|} \cdot \|P_1 - P_2\| \leq \|x - P_2\| \end{aligned}$$

lo cual pone fin a la demostración de esta proposición. ■

La correspondiente generalización a más de dos puntos alineados queda enunciada a continuación:

**Proposición 3.2.4.** *Dados  $m$  puntos  $P_1, P_2, \dots, P_m$  alineados y distintos, pertenecientes a un espacio vectorial normado  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ , y siendo  $X$  la envolvente convexa de los puntos  $P_i$ , se cumple que para cada  $x \in V$  existe un segmento  $I$ , que en ocasiones puede estar reducido a un único punto, contenido en  $X$  tal que para todo  $i \in I$  se cumple que  $y \preceq x$ , es decir*

$$\|y - P_i\| \leq \|x - P_i\| \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, m$$

*Demostración:*

Como  $P_1, P_2, \dots, P_m$  están alineados, existen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  tales que  $P_i = P_1 + \lambda_i \cdot (P_m - P_1)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que los puntos están elegidos de tal forma que

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{m-1} \leq \lambda_m = 1$$

con lo que  $\lambda_i = \frac{\|P_i - P_1\|}{\|P_m - P_1\|}$  y por tanto, la envolvente convexa de los puntos  $P_i$  es el segmento  $[P_1, P_m]$

Consideremos el conjunto

$$I_i = \left\{ y \in [P_1, P_m]; \|y - P_i\| \leq \|x - P_i\| \right\}$$

Puesto que todos los elementos del conjunto  $[P_1, P_m]$  son de la forma  $\alpha \cdot P_1 + (1 - \alpha) \cdot P_m$  con  $0 \leq \alpha \leq 1$ , podemos determinar los puntos del segmento  $I_i$  observando que

$$\begin{aligned} \|y - P_i\| &= \left\| \alpha \cdot P_1 + (1 - \alpha) \cdot P_m - P_1 - \frac{\|P_i - P_1\|}{\|P_m - P_1\|} \cdot (P_m - P_1) \right\| = \\ &= \left\| \left( \alpha - 1 + \frac{\|P_i - P_1\|}{\|P_m - P_1\|} \right) \cdot P_1 - \left( \alpha - 1 + \frac{\|P_i - P_1\|}{\|P_m - P_1\|} \right) \cdot P_m \right\| = \\ &= \left| \alpha - 1 + \frac{\|P_i - P_1\|}{\|P_m - P_1\|} \right| \cdot \|P_m - P_1\| \leq \|x - P_i\| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{\|x - P_i\| + \|P_i - P_1\|}{\|P_m - P_1\|} \leq \alpha \leq 1 + \frac{\|x - P_i\| - \|P_i - P_1\|}{\|P_m - P_1\|} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{\|x - P_i\| + \|P_i - P_1\|}{\|P_m - P_1\|} \leq \alpha \leq \frac{\|x - P_i\| + \|P_m - P_1\|}{\|P_m - P_1\|} \end{aligned}$$

Como queremos que el segmento  $I_i$  esté contenido en  $[P_j, P_m]$ , construyámoslo como

$$I_i = \{\alpha \cdot P_1 + (1 - \alpha) \cdot P_m; \alpha_{1i} \leq \alpha \leq \alpha_{2i}\}$$

siendo

$$\begin{aligned} \alpha_{1i} &= \max \left\{ 0, 1 - \frac{\|x - P_i\| + \|P_i - P_1\|}{\|P_m - P_1\|} \right\} = \\ &= 1 - \min \left\{ 1, \frac{\|x - P_i\| + \|P_i - P_1\|}{\|P_m - P_1\|} \right\} \\ \alpha_{2i} &= \min \left\{ 1, \frac{\|x - P_i\| + \|P_m - P_i\|}{\|P_m - P_1\|} \right\} \end{aligned}$$

Veamos que para todo  $j, k \in \{1, 2, \dots, m\}, \alpha_{2k} - \alpha_{1j} \geq 0$

Puesto que

$$\begin{aligned} \alpha_{1j} &= \max \left\{ 0, 1 - \frac{\|x - P_j\| + \|P_j - P_1\|}{\|P_m - P_1\|} \right\} = \\ &= 1 - \min \left\{ 1, \frac{\|x - P_j\| + \|P_j - P_1\|}{\|P_m - P_1\|} \right\} \\ \alpha_{2k} &= \min \left\{ 1, \frac{\|x - P_k\| + \|P_m - P_k\|}{\|P_m - P_1\|} \right\} \end{aligned}$$

habremos concluido si comprobamos que

$$\min \left\{ 1, \frac{\|x - P_k\| + \|P_m - P_k\|}{\|P_m - P_1\|} \right\} + \min \left\{ 1, \frac{\|x - P_j\| + \|P_j - P_1\|}{\|P_m - P_1\|} \right\} \geq 1$$

Como la desigualdad es evidente si alguno de los mínimos es 1, centrémonos únicamente en el caso en el que

$$\min \left\{ 1, \frac{\|x - P_k\| + \|P_m - P_k\|}{\|P_m - P_1\|} \right\} = \frac{\|x - P_k\| + \|P_m - P_k\|}{\|P_m - P_1\|}$$

$$\min \left\{ 1, \frac{\|x - P_j\| + \|P_j - P_1\|}{\|P_m - P_1\|} \right\} = \frac{\|x - P_j\| + \|P_j - P_1\|}{\|P_m - P_1\|}$$

Por las propiedades de las normas, podemos asegurar que

$$\begin{aligned} \|P_m - P_1\| &= \|P_m - x + x - P_1\| \leq \|P_m - x\| + \|x - P_1\| = \\ &= \|P_m - P_k + P_k - x\| + \|x - P_j + P_j - P_1\| \leq \\ &\leq \|P_m - P_k\| + \|P_k - x\| + \|x - P_j\| + \|P_j - P_1\| = \\ &= \|P_m - P_k\| + \|x - P_k\| + \|x - P_j\| + \|P_j - P_1\| \end{aligned}$$

con lo que la desigualdad resulta evidente, sin más que dividir la desigualdad anterior por  $\|P_m - P_1\|$

Así, el segmento buscado es

$$I = \bigcap_{i=1}^m I_i = \left\{ \alpha \cdot P_1 + (1 - \alpha) \cdot P_2, \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 \right\}$$

siendo

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \max_{1 \leq i \leq m} \alpha_{1i} = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ 0, 1 - \frac{\|x - P_i\| + \|P_i - P_1\|}{\|P_m - P_1\|} \right\} = \\ &= 1 - \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ 1, \frac{\|x - P_i\| + \|P_i - P_1\|}{\|P_m - P_1\|} \right\} \\ \alpha_2 &= \min_{1 \leq i \leq m} \alpha_{2i} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ 1, \frac{\|x - P_i\| + \|P_m - P_i\|}{\|P_m - P_1\|} \right\} \end{aligned}$$



Por último, cuando los puntos no están alineados, se verifica la siguiente propiedad:

**Teorema 3.2.1.** *Dados  $m$  puntos distintos  $P_1, P_2, \dots, P_m$  pertenecientes a un espacio vectorial normado  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$  y siendo  $X$  la envolvente convexa de los puntos  $P_i$ , para cada  $x \in \mathbb{R}^2$  existe  $y \in X$  tal que  $y \preceq x$ , es decir*

$$\|y - P_i\| \leq \|x - P_i\| \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, m$$

*Demostración:*

Dado  $x \in \mathbb{R}^2$ , consideremos el conjunto

$$A = \left\{ y \in \mathbb{R}^2, \|y - P_i\| \leq \|x - P_i\|, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, m \right\}$$

Puesto que si  $A \cap X \neq \emptyset$  hemos terminado, supongamos que  $A \cap X = \emptyset$

Nuestro conjunto  $A$  es convexo, ya que si  $y_1, y_2 \in A$ , sabemos que

$$\|y_1 - P_i\| \leq \|x - P_i\|, \|y_2 - P_i\| \leq \|x - P_i\| \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, m$$

Por tanto, para cualquier  $\alpha \in [0, 1]$  se cumple que

$$\begin{aligned} & \|\alpha \cdot y_1 + (1 - \alpha) \cdot y_2 - P_i\| = \|\alpha \cdot (y_1 - P_i) + (1 - \alpha) \cdot (y_2 - P_i)\| \leq \\ & \leq \alpha \cdot \|y_1 - P_i\| + (1 - \alpha) \cdot \|y_2 - P_i\| \leq \alpha \cdot \|x - P_i\| + (1 - \alpha) \cdot \|x - P_i\| = \|x - P_i\| \end{aligned}$$

Como  $A$  es un conjunto cerrado, no vacío (ya que  $x \in A$ ) y convexo, el teorema de Hahn-Banach nos permite afirmar que existe un hiperplano de  $\mathbb{R}^2$  que separa a  $A$  y a  $X$ ; es decir, existe  $Q \in \mathbb{R}^2$  con  $Q \neq 0$  y existe  $k \in \mathbb{R}$  tales que la función  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $F(P) = \langle P, Q \rangle + k$  cumple que  $F(P) < 0$  para todo  $P \in A$  y  $F(P) > 0$  para todo  $P \in X$ .

Por tanto,  $Q \neq 0$  y además se cumple que  $F(x) < 0$  puesto que  $x \in A$  y también se cumple, para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ , que  $F(P_i) > 0$  puesto que  $P_i \in X$

Así, podemos afirmar que existen escalares  $\alpha_i \in (0, 1)$  de tal forma que los puntos  $Q_i = \alpha_i \cdot x + (1 - \alpha_i) \cdot P_i$  cumplen que  $F(Q_i) = 0$

En virtud de la proposición 3.2.1 podemos afirmar que los puntos  $Q$  están alineados y por tanto, por la proposición 3.2.4, sabemos que existe algún punto  $z$  de la envolvente convexa de los  $Q_i$  (y por tanto alineado con ellos y, de nuevo, por la proposición 3.2.1 cumplirá que  $F(z) = 0$ ) de tal forma que  $\|z - Q_i\| \leq \|x - Q_i\|$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$

Sin embargo, puesto que  $Q_i \in [x, P_i]$ , en virtud de las propiedades de las normas y de la proposición 3.2.2, podemos afirmar que

$$\begin{aligned} \|z - P_i\| &= \|z - Q_i + Q_i - P_i\| \leq \|z - Q_i\| + \|Q_i - P_i\| \leq \\ &\leq \|x - Q_i\| + \|Q_i - P_i\| = \|x - P_i\| \end{aligned}$$

lo que significa que  $z \in A$  y por tanto,  $F(z) < 0$  lo cual es una contradicción con  $F(P) = 0$ .

Salvo este último resultado, todos los anteriores son generalizables a espacios de dimensión mayor que 2. Sin embargo, este teorema no es cierto en tales espacios con una norma arbitraria y, como va a jugar un papel fundamental en nuestro desarrollo posterior, nos ha condicionado a dicha restricción en la dimensión de nuestros espacios de trabajo, ya que deseamos aplicarlo sin perder la capacidad de optar por una norma cualquiera. Aunque en (Wendell y Hurter, 1973) se demuestra que el teorema 3.2.1 también es cierto cuando trabajamos sobre  $\mathbb{R}^n$  con  $\|\cdot\|_2$ , en general, no se verifica para  $\mathbb{R}^n$  con cualquier norma, como podemos comprobar con el siguiente ejemplo: ■

### EJEMPLO 3

Si consideramos los puntos  $P_1 = (1, 0, 0)$ ,  $P_2 = (0, 1, 0)$ ,  $P_3 = (0, 0, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$  y la norma  $\|\cdot\|_1$  (siendo  $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ ,  $\|z\|_1 = |z_1| + |z_2| + |z_3|$ ), la envolvente convexa de los puntos  $P_1$ ,  $P_2$ , y  $P_3$  es

$$\begin{aligned} X &= \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, 2, 3\} = \\ &= \{(\lambda_1, \lambda_2, 1 - \lambda_1 - \lambda_2) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq \lambda_1 \leq 1, 0 \leq \lambda_2 \leq 1, \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1\} \end{aligned}$$

Tomando como  $x = (0, 0, 0)$ , si algún elemento  $y \in X$  cumple que

$$\|y - (1, 0, 0)\|_1 = 2 - 2\lambda_1 \leq \|(0, 0, 0) - (1, 0, 0)\|_1 = 1$$

entonces  $\frac{1}{2} \leq \lambda_1 \leq 1$

Por otra parte, si algún elemento  $y \in X$  cumple que

$$\|y - (0, 1, 0)\|_1 = 2 - 2\lambda_2 \leq \|(0, 0, 0) - (0, 1, 0)\|_1 = 1$$

entonces  $\frac{1}{2} \leq \lambda_2 \leq 1$

Por último, si algún elemento  $y \in X$  cumple que

$$\|y - (0, 0, 1)\|_1 = 2(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \|(0, 0, 0) - (0, 0, 1)\|_1 = 1$$

entonces  $\lambda_1 + \lambda_2 \leq \frac{1}{2}$ , pero estas tres condiciones no se pueden dar simultáneamente. ■

Este último teorema también nos conduce al resultado fundamental para los problemas clásicos de localización de centros deseados que afirma que la solución pertenece a la envolvente convexa de las localidades afectadas, ya que si consideramos que éstas se encuentran en los puntos  $\{a_1, a_2, a_3\}$ , para cada  $x \notin [a_1, a_2, \dots, a_m]$  podemos encontrar  $y \in [a_1, a_2, \dots, a_m]$  de tal forma que  $\|y - a_i\| \leq \|x - a_i\|$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ , con lo que  $y$  será preferible a  $x$ . Es decir, la búsqueda de la mejor ubicación para un centro deseado podemos restringirla a  $[a_1, a_2, \dots, a_m]$ .

Sin embargo, en el caso de que el centro a ubicar sea no deseado, el siguiente resultado nos obliga a restringir el conjunto dentro del cual queremos emplazar tal instalación, ya que, de otro modo, cualquier posible ubicación siempre puede ser estrictamente mejorada:

**Proposición 3.2.5.** *Dados  $m$  puntos  $P_1, P_2, \dots, P_m$  distintos de un espacio vectorial normado  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ , para cada  $x \in \mathbb{R}^2$  existe  $x^* \in \mathbb{R}^2$  tal que  $x^* \neq x$  y además  $\|x - P_i\| > \|x^* - P_i\|$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ .*

*Demostración:*

Dado  $x \in \mathbb{R}^2$ , existe  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  tal que  $x \neq P_i$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad que  $i = 1$

$$\text{Para todo } \lambda > \frac{2}{\|x - P_1\|} \cdot \max\{\|x - P_1\|, \|x - P_2\|, \dots, \|x - P_m\|\},$$

el punto  $x^* = x + \lambda \cdot (P_1 - x)$ , cumple que  $x^* \neq x$  puesto que, en tal caso, se tendría que cumplir que  $\lambda = 0$  o que  $x = P_1$ , lo que nos conduciría a contradicción.

Además, para dicho punto  $x^*$ , también se verifica que

$$\lambda \cdot \|x - P_1\| = \|x^* - x\| \leq \|x^* - P_i\| + \|P_i - x\|, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

con lo que podemos afirmar que

$$\|x^* - P_i\| \geq \lambda \cdot \|x - P_1\| - \|x - P_i\| > 2 \cdot \|x - P_1\| - \|x - P_i\| = \|x - P_i\|$$

■

Así, para evitar que siempre se pueda realizar la construcción de la demostración anterior, lo que nos llevaría a que, dada cualquier posible ubicación, siempre es estrictamente mejorable, de aquí en adelante exigiremos la existencia de una región  $S$ , cerrada y acotada, a la que nos tengamos que restringir a la hora de ubicar un centro no deseado.

### 3.3. Dominancia en conjuntos cerrados y acotados

Teniendo en cuenta el comentario anterior, supongamos que, dada una región  $S$ , cerrada y acotada de  $\mathbb{R}^2$ , queremos determinar la ubicación óptima, dentro de ella, de un centro no deseado por un conjunto dado de poblaciones  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ .

Basándonos en el siguiente teorema, cualquier punto de  $S - \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  siempre lo podemos dominar por algún punto de la frontera de  $S$ :

**Teorema 3.3.1.** *Sea  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^2$ ,  $S \subset \mathbb{R}^2$  cerrado y acotado,  $P_1, P_2, \dots, P_m$  puntos de  $\mathbb{R}^2$  y  $X$ . Entonces, para todo  $x \in S - X$ , podemos encontrar  $x^* \in Fr(S) - X$  tal que  $x \preceq x^*$ .*

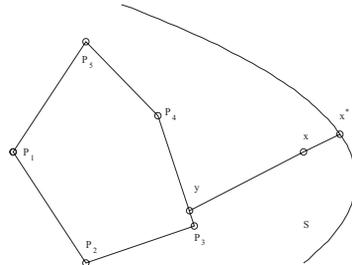
*Demostración:*

Sea  $x$  un punto cualquiera de  $S - X$ . Por el teorema 3.2.1, existe  $y \in X$  tal que  $\|y - P_i\| \leq \|x - P_i\|$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Sea  $\lambda^* = \max\{\lambda \geq 1; \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y \in S\}$  y consideremos el punto  $x^* = \lambda^* \cdot x + (1 - \lambda^*) \cdot y$  que estará en  $Fr(S)$  por construcción.

Así,  $x$  lo podemos escribir como  $x = \frac{1}{\lambda^*} \cdot x^* + \frac{\lambda^* - 1}{\lambda^*} \cdot y$ , con lo que  $x^*$  no puede pertenecer a  $X$  y, además,

$$\begin{aligned} \|x - P_i\| &= \left\| \frac{1}{\lambda^*} \cdot x^* + \frac{\lambda^* - 1}{\lambda^*} \cdot y - P_i \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{\lambda^*} \cdot (x^* - P_i) + \frac{\lambda^* - 1}{\lambda^*} \cdot (y - P_i) \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda^*} \cdot \|x^* - P_i\| + \frac{\lambda^* - 1}{\lambda^*} \cdot \|y - P_i\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda^*} \cdot \|x^* - P_i\| + \frac{\lambda^* - 1}{\lambda^*} \cdot \|x - P_i\| \end{aligned}$$



de donde obtenemos que  $\|x - P_i\| \leq \|x^* - P_i\|$ ; es decir, cualquier punto de  $S$  que no esté en la envolvente convexa  $[P_1, P_2, \dots, P_m]$  lo podemos dominar por otro punto que está en  $Fr(S) - [P_1, P_2, \dots, P_m]$ . ■

Así, a la hora de determinar la ubicación óptima, según cualquier criterio coherente, de un centro no deseado, dentro de una región  $S$  cerrada y acotada, podemos eliminar en una primera fase de búsqueda, todos estos puntos dominados, es decir, cualquier punto de  $S - [a_1, a_2, \dots, a_m]$  que no esté en la frontera de  $S$ .

Cabe preguntarse si será posible proceder de la misma forma con los puntos de  $S \cap X$ , dominándolos por puntos del propio conjunto  $S \cap X$  o bien por puntos de  $Fr(S) - X$ . Sin embargo, la respuesta a esta cuestión no es, en general, afirmativa, como pondremos de manifiesto tras las dos siguientes proposiciones:

**Proposición 3.3.1.** Sean  $A, B, y C \in \mathbb{R}^2$  y  $x \in [A, B, C]$ . Entonces

$$\|x - A\| + \|x - B\| \leq \|C - A\| + \|C - B\|$$

*Demostración:*

Puesto que  $x \in [A, B, C]$ , sabemos que existen  $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$  tales que  $x = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$  con  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ , con lo que  $x$  lo podemos escribir como  $x = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + (1 - \alpha - \beta) \cdot C$

Por tanto, también podemos afirmar, en virtud de las propiedades de las normas, que

$$\begin{aligned} \|x - A\| &= \|\alpha \cdot A + \beta \cdot B + (1 - \alpha - \beta) \cdot C - A\| = \\ &= \|(\alpha - 1) \cdot (A - C) + \beta \cdot (B - C)\| \leq (1 - \alpha) \cdot \|A - C\| + \beta \cdot \|B - C\| \\ \|x - B\| &= \|\alpha \cdot A + \beta \cdot B + (1 - \alpha - \beta) \cdot C - B\| = \\ &= \|(\beta - 1) \cdot (B - C) + \alpha \cdot (A - C)\| \leq \alpha \cdot \|A - C\| + (1 - \beta) \cdot \|B - C\| \end{aligned}$$

y sumando ambas desigualdades obtenemos el resultado propuesto. ■

**Proposición 3.3.2.** Sea  $X = [P_1, P_2, \dots, P_m]$  y sea  $T \subset \mathbb{R}^2$  de tal forma que el interior de  $T \cap X$  no sea vacío; es decir,  $(T \cap X)^\circ \neq \emptyset$ .

Entonces, para cada  $x \in (T \cap X)^\circ$  y para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ , existe  $y \in (T \cap X)$  tal que  $\|y - P_i\| > \|x - P_i\|$ .

*Demostración:*

Sea  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  y  $x \in (T \cap X)^\circ$ . Sabemos que existe  $x > 0$  tal que  $B(x, r) \subset (T \cap X)$

Como  $x \in (T \cap X)^\circ$ , entonces  $x \in X^\circ$  y por tanto,  $x \neq P_i$ . Consideremos

$$\text{el punto } y = \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot P_i \text{ con } \lambda = 1 + \frac{r}{\|x - P_i\|}$$

En consecuencia,  $y \in (T \cap X)$  puesto que

$$\|x - y\| = (\lambda - 1) \cdot \|x - P_i\| = \frac{r}{\|x - P_i\|} \cdot \|x - P_i\| = r$$

es decir,  $y \in B(x, r) \subset (T \cap X)$

Despejando convenientemente de la construcción de  $y$  podemos obtener que  $x = \frac{1}{\lambda} \cdot y + \frac{\lambda - 1}{\lambda} \cdot P_i$ , con lo que

$$\|x - P_i\| = \frac{1}{\lambda} \cdot \|y - P_i\| < \|y - P_i\|$$

■

El siguiente teorema afirma que, siendo  $X = [P_1, P_2, \dots, P_m]$  y bajo unas hipótesis mínimas, no podemos, en general, dominar los puntos de  $(X \cap S)$  por puntos del propio  $(X \cap S)$

**Teorema 3.3.2.** *Siendo  $X = [P_1, P_2, \dots, P_m]$  tal que  $(X \cap S)^\circ \neq \emptyset$ , para todo  $x \in (X \cap S)$  existe  $y \in (X \cap S)$  y existe  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  de tal forma que  $\|y - P_i\| > \|x - P_i\|$*

*Es decir, ningún punto de  $X \cap S$  domina a todos los puntos de  $X \cap S$ .*

*Demostración:*

Si  $x \in (X \cap S)^\circ$ , podemos aplicar la anterior proposición 3.3.2 al conjunto  $T = S$ , con lo que existe  $y \in X \cap S$  tal que, por ejemplo, para  $i = 1$ , se tiene que  $\|y - P_1\| > \|x - P_1\|$ , con lo que habríamos terminado.

Así, supongamos que  $x \in Fr(X \cap S)$ . Puesto que  $(X \cap S)^\circ \neq \emptyset$ , sabemos que existe  $t \in (X \cap S)^\circ$  y consideremos la partición de la poligonal  $X$  en triángulos de vértice común  $t$  y los otros vértices que sean vértices consecutivos de  $X$ .

Por tanto, existen  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$  tales que  $i \neq j$ , cumpliendo además que  $x \in [P_i, P_j, \dots, t]$ . Por la proposición 3.3.1, sabemos que

$$\|x - P_i\| + \|x - P_j\| \leq \|t - P_i\| + \|t - P_j\|$$

Por tanto se cumple que  $\|x - P_i\| \leq \|t - P_i\|$  o que  $\|x - P_j\| \leq \|t - P_j\|$  puesto que si

$$\left. \begin{array}{l} \|x - P_i\| > \|t - P_i\| \\ \|x - P_j\| > \|t - P_j\| \end{array} \right\} \Rightarrow \|x - P_i\| + \|x - P_j\| > \|t - P_i\| + \|t - P_j\|$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\|x - P_i\| \leq \|t - P_i\|$

Puesto que si  $\|x - P_i\| < \|t - P_i\|$  ya habríamos terminado, supongamos además que  $\|x - P_i\| = \|t - P_i\|$

En este caso, aplicando la proposición 3.3.2 al conjunto  $T = S$ , podemos afirmar que existe  $y \in (X \cap S)$  tal que  $\|t - P_i\| = \|x - P_i\| < \|y - P_i\|$ , lo que pone fin a esta demostración. ■

Por otra parte, en general, tampoco podemos dominar los puntos de  $X \cap S$  por puntos de  $Fr(S) - X$ , como se puede observar a la luz del siguiente ejemplo, con lo que, en general, los puntos de  $X \cap S$  no los podemos eliminar como posibles ubicaciones preferibles, puesto que no los podemos dominar ni por puntos de  $X \cap S$  ni por puntos de  $Fr(S) - X$ . Así, los puntos que no podemos reducir en esta primera fase serán los de

$$(X \cap S) \cup (Fr(S) - X) = S \cap (Fr(S) \cup X)$$

**EJEMPLO 4**

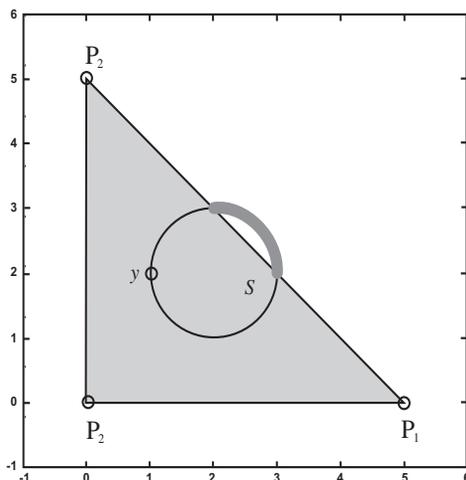
Sea  $S = \{(z_x, z_y) \in \mathbb{R}^2; (z_x - 2)^2 + (z_y - 2)^2 \leq 1\}$  y sean

$$P_1 = (5, 0), P_2 = (0, 5), P_3 = (0, 0)$$

Los puntos  $x \in Fr(S) - X$ , son de la forma  $x = (2 + \cos\theta, 2 + \sin\theta)$

$$\text{con } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

El punto  $y = (1, 2) \in (X \cap S)$  pero todos los puntos  $x \in Fr(S) - X$  cumplen que  $\|y - P_1\| > \|x - P_1\|$ , siendo  $\|\cdot\|$  la norma euclídea; es decir, el punto  $y \in (X \cap S)$  no está dominado por ninguno de  $Fr(S) - X$



Por tanto, el concepto de dominancia no nos permite reducir los conjuntos  $X \cap S$  ni  $Fr(S) - X$  para cualquier función isótona. Sin embargo, tal reducción sí que será posible para las funciones asociadas a determinadas políticas como se pone de manifiesto, por ejemplo, en (Mechrinoudis y Culliane, 1986) cuando la norma considerada es la euclídea: si la región  $S$  es poligonal, las soluciones del problema "maximin", si se alcanzan en  $S^\circ \cap X$  equidistan ponderadamente de tres de las poblaciones dadas y, si se alcanzan en  $Fr(S)$ , o son un vértice de la poligonal o equidistan ponderadamente de dos poblaciones dadas.

## **CAPÍTULO IV:**

### **UN MODELO INTEGRADOR PARA PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN DE UN CENTRO NO DESEADO**



## Un modelo integrador para problemas de localización de un centro no deseado

En general, entre los artículos citados en el capítulo 2, en aquellos en los que únicamente se tienen en cuenta factores medioambientales, se supone, de una u otra forma, la existencia de una región  $S$  cerrada y acotada del plano dentro de la cual se desea instalar un centro no deseado, una colección de puntos  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  que representan las localidades afectadas por tal instalación, una norma definida sobre  $\mathbb{R}^2$  y unas constantes positivas  $w_i$  indicando el peso relativo de cada población en el conjunto de la sociedad.

Los problemas que se abordan en esos trabajos son los correspondientes a los criterios “maximin” y “maxisum” que, como ya hemos indicado anteriormente, los podemos enunciar respectivamente como:

- determinar los puntos de  $S$  que maximizan la función

$$F(x) = \min \{ w_1 \cdot \|x - a_1\|, w_2 \cdot \|x - a_2\|, \dots, w_m \cdot \|x - a_m\| \}$$

- determinar los puntos de  $S$  que maximizan la función

$$G(x) = \sum_{i=1}^m (w_i \cdot \|x - a_i\|)$$

Aunque ambos problemas tienen solución, puesto que cada una de estas funciones es continua y la región  $S$  del plano es cerrada y acotada, por lo general, cada uno de ellos se resuelve independientemente a través de vías diferentes. Este capítulo está dedicado a presentar un modelo desde el que es posible resolver cualquiera de ellos e incluso cualquier otro obtenido a través de la especificación de un criterio dentro de una amplia familia, obteniendo así una teoría unificada que nos permitirá aplicar una línea de razonamientos común.

#### 4.1. Planteamiento del problema

Sea  $S$  un subconjunto cerrado y acotado del plano,  $\|\cdot\|$  una norma definida sobre  $\mathbb{R}^2$ ,  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  puntos del plano que representan el lugar que ocupan  $m$  poblaciones y una aplicación  $w: \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \rightarrow \mathbb{R}^+$  que asocia a cada una de las localidades  $a_i$  un valor positivo  $w(a_i) = w_i$ , al que llamaremos peso de la población  $a_i$ , y representa el grado de importancia de cada población en el total de la sociedad.

Llamaremos **problema ordenado de localización de un centro no deseado** a la determinación de los puntos  $x \in S$  que maximizan la función objetivo

$$f(x) = \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\sigma(i)} \cdot \|x - a_{\sigma(i)}\|$$

donde  $\sigma$  es la permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  tal que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x - a_{\sigma(m)}\|$$

y  $k_1, k_2, \dots, k_m$  son  $m$  constantes no negativas que vendrán determinadas al especificar el criterio a seguir y, para descartar el caso trivial, supondremos que no todas son nulas.

La posibilidad de modelar una amplia familia de problemas de localización de un centro no deseado sin más que fijar determinados valores para dichas constantes  $k_i$ , es la que nos permite ofrecer una teoría unificada para abordar, con eficiencia, problemas correspondientes a múltiples criterios, entre los que podemos destacar:

- $k_1 = 1, k_2 = k_3 = \dots = k_m = 0$ , corresponde al criterio "maximin".
- $k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_m = 1$ , corresponde al criterio "maxisum".
- fijado  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , tomar  $k_j = 1$  y  $k_i = 0$  para todo  $i \neq j$ , corresponde al problema de maximizar la distancia entre la  $j$ -ésima población más afectada y el centro no deseado a ubicar. Éste es una extensión del problema "maximin" y se conoce como el problema de localización del  $j$ -ésimo cuantil.
- fijado  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , tomar  $k_i = 1$  para todo  $i \leq j$  y  $k_i = 0$  para todo  $i > j$ , corresponde al problema de maximizar la suma de las distancias entre las poblaciones más afectadas y el centro no deseado a ubicar. Por lo tanto, es una extensión tanto del problema "maxisum" como del "maximin" y se conoce como el problema de localización del  $j$ -anticentro (ver (Díaz Bañez y Lozano, 2001) o (Lozano et al., 1999)).

- si  $k_i = 1$  y  $k_i = \lambda \in [0,1]$  para todo  $i > 1$ , obtenemos el denominador problema anticentrodian (versión continua del problema que se plantea en (Moreno Pérez y Rodríguez Martín, 1999) o (Colebrook et al., 1999)) en el que se persigue maximizar la siguiente función objetivo correspondiente al criterio que se obtiene al combinar de forma convexa los criterios "maximin" y "maxisum":

$$(1 - \lambda) \cdot \left( \min_{i=1,2,\dots,m} w_i \cdot \|x - P_i\| \right) + \lambda \cdot \left( \sum_{i=1}^m w_i \cdot \|x - P_i\| \right)$$

Además, también podemos utilizar esta función objetivo para obtener el diagrama de Voronoi ponderado para una norma cualquiera sin más que considerar la curva de nivel 0 de la función objetivo asociada a los valores  $k_1 = -1$ ,  $k_2 = 1$ , y  $k_i = 0$  para todo  $i = 3, 4, \dots, m$ , aunque estemos violando la condición de no negatividad para las constantes  $k_i$ .

En principio, podemos afirmar que nuestro problema siempre tiene solución puesto que, además de ser  $S$  una región cerrada y acotada, la función  $f$  que deseamos maximizar es continua, como se prueba en la siguiente proposición.

**Proposición 4.1.1.** *La siguiente función es continua en todo  $\mathbb{R}^2$ :*

$$f(x) = \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\sigma(i)} \cdot \|x - a_{\sigma(i)}\|$$

siendo  $a_i$  una colección de  $m$  puntos de  $\mathbb{R}^2$  asociados, respectivamente, a las constantes positivas  $w_i$ ,  $k_i$  constantes no negativas,  $\|\cdot\|$  una norma definida en  $\mathbb{R}^2$  y  $\sigma$  la permutación en el conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  tal que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x - a_{\sigma(m)}\|$$

*Demostración:*

Sea  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  y, sin pérdida de generalidad y por comodidad en la notación, supongamos que la permutación  $\sigma$  que nos permite evaluar la función en dicho punto, es la identidad, con lo que se cumple que

$$w_1 \cdot \|x_0 - a_1\| \leq w_2 \cdot \|x_0 - a_2\| \leq \dots \leq w_m \cdot \|x_0 - a_m\|$$

- Si todas las desigualdades son estrictas, es decir, si

$$w_1 \cdot \|x_0 - a_1\| < w_2 \cdot \|x_0 - a_2\| < \dots < w_m \cdot \|x_0 - a_m\|$$

por la continuidad de la norma, podemos afirmar que

–  $g_1(x) = w_1 \cdot \|x - a_1\| - w_2 \cdot \|x - a_2\|$  es una función continua, con lo que, como  $g_1(x_0) = w_1 \cdot \|x_0 - a_1\| - w_2 \cdot \|x_0 - a_2\| < 0$ , podemos afirmar que existe un valor  $\delta_1 > 0$  tal que si  $\|x - x_0\| < \delta_1$ , entonces  $g_1(x) \leq 0$ , es decir,  $w_1 \cdot \|x - a_1\| \leq w_2 \cdot \|x - a_2\|$

⋮

–  $g_2(x) = w_2 \cdot \|x - a_2\| - w_3 \cdot \|x - a_3\|$  es una función continua, con lo que, como  $g_2(x_0) = w_2 \cdot \|x_0 - a_2\| - w_3 \cdot \|x_0 - a_3\| < 0$ , podemos afirmar que existe un valor  $\delta_2 > 0$  tal que si  $\|x - x_0\| < \delta_2$ , entonces  $g_2(x) \leq 0$ , es decir,  $w_2 \cdot \|x - a_2\| \leq w_3 \cdot \|x - a_3\|$

–  $g_{m-1}(x) = w_{m-1} \cdot \|x - a_{m-1}\| - w_m \cdot \|x - a_m\|$  es continua, y como  $g_{m-1}(x_0) = w_{m-1} \cdot \|x_0 - a_{m-1}\| - w_m \cdot \|x_0 - a_m\| < 0$ , podemos afirmar que existe  $\delta_{m-1} > 0$  tal que si  $\|x - x_0\| < \delta_{m-1}$ , entonces  $g_{m-1}(x) \leq 0$ , es decir,  $w_{m-1} \cdot \|x - a_{m-1}\| \leq w_m \cdot \|x - a_m\|$

Así, tomando  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{m-1}\}$ , tenemos que si  $\|x - x_0\| < \delta$  entonces, se cumple que

$$w_1 \cdot \|x - a_1\| \leq w_2 \cdot \|x - a_2\| \leq \dots \leq w_m \cdot \|x - a_m\|$$

con lo que  $f(x) = \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_i \cdot \|x - a_i\|$  es una función continua.

- Si, por el contrario, alguna de las desigualdades no es estricta, es decir, si existe  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  tal que  $w_i \cdot \|x_0 - a_i\| = w_{i+1} \cdot \|x_0 - a_{i+1}\|$ , consideremos  $k = \max\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$

Para cualquier valor  $\varepsilon > 0$  podemos afirmar que

– como la función  $h_1(x) = w_1 \cdot \|x - a_1\|$  es continua, existe un valor  $v_1 > 0$  tal que si  $\|x - x_0\| < v_1$ , entonces

$$|w_1 \cdot \|x - a_1\| - w_1 \cdot \|x_0 - a_1\|| < \frac{\varepsilon}{k \cdot m}$$

– como la función  $h_2(x) = w_2 \cdot \|x - a_2\|$  es continua, existe un valor  $v_2 > 0$  tal que si  $\|x - x_0\| < v_2$ , entonces

$$|w_2 \cdot \|x - a_2\| - w_2 \cdot \|x_0 - a_2\|| < \frac{\varepsilon}{k \cdot m}$$

⋮

– como la función  $h_m(x) = w_m \cdot \|x - a_m\|$  es continua, existe un valor  $v_m > 0$  tal que si  $\|x - x_0\| < v_m$ , entonces

$$|w_m \cdot \|x - a_m\| - w_m \cdot \|x_0 - a_m\|| < \frac{\varepsilon}{k \cdot m}$$

y sea  $\delta = \min\{v_1, v_2, \dots, v_m, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{i-1}, \delta_{i+1}, \dots, \delta_{m-1}\}$  para los valores  $\delta_k$  descritos en el apartado anterior.

Sea  $x \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\|x - x_0\| < \delta$ . Entonces se tienen que verificar alguna de las dos siguientes alternativas:

– Si se cumpliera que

$$w_1 \cdot \|x - a_1\| \leq \dots \leq w_i \cdot \|x - a_i\| \leq w_{i+1} \cdot \|x - a_{i+1}\| \leq \dots \leq w_m \cdot \|x - a_m\|$$

entonces se verificaría que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq k_1 \cdot |w_1 \cdot \|x - a_1\| - w_1 \cdot \|x_0 - a_1\|| + \\ &\quad + k_2 \cdot |w_2 \cdot \|x - a_2\| - w_2 \cdot \|x_0 - a_2\|| + \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + k_i \cdot |w_i \cdot \|x - a_i\| - w_i \cdot \|x_0 - a_i\|| + \\ &\quad + k_{i+1} \cdot |w_{i+1} \cdot \|x - a_{i+1}\| - w_{i+1} \cdot \|x_0 - a_{i+1}\|| + \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + k_m \cdot |w_m \cdot \|x - a_m\| - w_m \cdot \|x_0 - a_m\|| < \\ &< k_1 \cdot \frac{\varepsilon}{k \cdot m} + k_2 \cdot \frac{\varepsilon}{k \cdot m} + \dots + k_m \cdot \frac{\varepsilon}{k \cdot m} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

– Si, en caso contrario, se cumpliera que

$$w_1 \cdot \|x - a_1\| \leq \dots \leq w_{i+1} \cdot \|x - a_{i+1}\| \leq w_i \cdot \|x - a_i\| \leq \dots \leq w_m \cdot \|x - a_m\|$$

entonces se verificaría que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq k_1 \cdot |w_1 \cdot \|x - a_1\| - w_1 \cdot \|x_0 - a_1\|| + \\ &\quad + k_2 \cdot |w_2 \cdot \|x - a_2\| - w_2 \cdot \|x_0 - a_2\|| + \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + k_i \cdot |w_{i+1} \cdot \|x - a_{i+1}\| - w_i \cdot \|x_0 - a_i\|| + \\ &\quad + k_{i+1} \cdot |w_i \cdot \|x - a_i\| - w_{i+1} \cdot \|x_0 - a_{i+1}\|| + \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + k_m \cdot |w_m \cdot \|x - a_m\| - w_m \cdot \|x_0 - a_m\|| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \text{puesto que } w_i \cdot \|x_0 - a_i\| = w_{i+1} \cdot \|x_0 - a_{i+1}\| \right) \\
= & k_1 \cdot |w_1 \cdot \|x - a_1\| - w_1 \cdot \|x_0 - a_1\|| + \\
& + k_2 \cdot |w_2 \cdot \|x - a_2\| - w_2 \cdot \|x_0 - a_2\|| + \\
& \quad \quad \quad + \dots + \\
& + k_i \cdot |w_{i+1} \cdot \|x - a_{i+1}\| - w_{i+1} \cdot \|x_0 - a_{i+1}\|| + \\
& + k_{i+1} \cdot |w_i \cdot \|x - a_i\| - w_i \cdot \|x_0 - a_i\|| + \\
& \quad \quad \quad + \dots + \\
& + k_m \cdot |w_m \cdot \|x - a_m\| - w_m \cdot \|x_0 - a_m\|| < \\
< & k_1 \cdot \frac{\varepsilon}{k \cdot m} + k_2 \cdot \frac{\varepsilon}{k \cdot m} + \dots + k_m \cdot \frac{\varepsilon}{k \cdot m} \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

lo que pone fin a la prueba de la continuidad de la función. ■

Así, sea cual sea la elección de las constantes, el problema de determinar el máximo de la correspondiente función dentro de una región  $S$  cerrada y acotada, siempre tiene solución; es decir, siempre podemos encontrar un punto  $x_0 \in S$  tal que  $f(x_0) \geq f(x)$ , para todo  $x \in S$ , con lo que habremos determinado una ubicación óptima para nuestro centro no deseado.

Además de la continuidad de nuestra función  $f(x)$ , también podemos asegurar que, todo criterio asociado a una elección de las constantes no negativas  $k_i$ , cumple el principio de coherencia, subyacente en la definición de la isotonía, como se prueba en la siguiente proposición:

**Proposición 4.1.2.** Si  $\|y - a_i\| \leq \|x - a_i\|$ , para todo  $\{1, 2, \dots, m\}$  (es decir, si  $y \preceq x$ ) entonces se cumple que  $f(y) \leq f(x)$

*Demostración:*

Sean  $x$  e  $y$  dos puntos de  $\mathbb{R}^2$  y sean  $\sigma$  y  $\tau$  las correspondientes permutaciones del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  tales que

$$\begin{aligned}
w_{\sigma(1)} \cdot \|x - a_{\sigma(1)}\| &\leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x - a_{\sigma(m)}\| \\
w_{\tau(1)} \cdot \|y - a_{\tau(1)}\| &\leq w_{\tau(2)} \cdot \|y - a_{\tau(2)}\| \leq \dots \leq w_{\tau(m)} \cdot \|y - a_{\tau(m)}\|
\end{aligned}$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $\tau$  es la identidad con lo que

$$w_1 \cdot \|y - a_1\| \leq w_2 \cdot \|y - a_2\| \leq \dots \leq w_m \cdot \|y - a_m\|$$

Demostraremos esta proposición observando que si  $\|y - a_i\| \leq \|x - a_i\|$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , entonces se cumple que

$$w_i \cdot \|y - a_i\| \leq w_{\sigma(i)} \cdot \|x - a_{\sigma(i)}\|, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Consideremos, entonces,  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ :

- Si  $\sigma(i) \geq i$ , se tiene que

$$w_i \cdot \|y - a_i\| \leq w_{\sigma(i)} \cdot \|y - a_{\sigma(i)}\| \leq w_{\sigma(i)} \cdot \|x - a_{\sigma(i)}\|$$

- Por otra parte, si  $\sigma(i) < i$ , entonces existe algún  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  tal que  $j < i$  y  $\sigma(j) \geq i$ . En tal caso, se tiene que cumplir que

$$w_i \cdot \|y - a_i\| \leq w_{\sigma(j)} \cdot \|y - a_{\sigma(j)}\| \leq w_{\sigma(j)} \cdot \|x - a_{\sigma(j)}\| \leq w_{\sigma(i)} \cdot \|x - a_{\sigma(i)}\|$$

Así, se verifica que  $k_i \cdot w_i \cdot \|y - a_i\| \leq k_i \cdot w_{\sigma(i)} \cdot \|x - a_{\sigma(i)}\|$ , con lo que

$$f(y) = \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_i \cdot \|y - a_i\| \leq \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\sigma(i)} \cdot \|x - a_{\sigma(i)}\| = f(x)$$

■

A la hora de determinar los máximos de nuestra función objetivo dentro de la región  $S$  cerrada y acotada del plano, se podría pensar en la posibilidad de utilizar resultados clásicos de optimización de funciones de dos variables. Sin embargo, para su utilización se exige que dicha función sea diferenciable y, desgraciadamente, la nuestra no lo es, como se puede observar con el ejemplo 5, con lo que intentar abordar nuestro problema con ellos es, en general, inviable.

Tratando el problema desde otro punto de vista, podríamos fácilmente obtener una notable reducción de las posibles soluciones a nuestro problema si, dentro de la región  $S$ , pudiésemos garantizar la convexidad<sup>1</sup> de la función objetivo, puesto que, en tal caso, sus máximos se encontrarían en la frontera de  $S$ . Lamentablemente esta función, en general, no posee esa propiedad, como también se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo:

### EJEMPLO 5

Consideremos la norma euclídea, los puntos  $a_1 = (-2, 0)$ ,  $a_2 = (2, 0)$ , equiponderados y como región  $S$ , el triángulo de vértices  $(-2, 0)$ ,  $(2, 0)$  y  $(0, 2)$ . La función que nos permite modelar el problema "maximin" es la correspondiente a los valores  $k_1 = 1$  y  $k_2 = 0$  cuya expresión es

<sup>1</sup> Para todo par de puntos  $x, y \in S$  y para todo  $\alpha \in [0, 1]$  se verifica que  $f(\alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y) \leq \alpha \cdot f(x) + (1 - \alpha) \cdot f(y)$

$$f(x, y) = \min \left\{ \sqrt{(x+2)^2 + y^2}, \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \right\}$$

Esta función no es diferenciable en ningún punto de la región  $S$  de la forma  $(2, y)$  con  $0 \leq y \leq 2$  puesto que

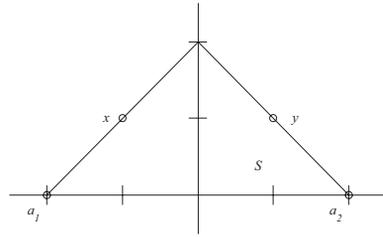
$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{(h-2)^2 + y^2} - \sqrt{4 + y^2}}{h} = \frac{-2}{\sqrt{4 + y^2}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{(h+2)^2 + y^2} - \sqrt{4 + y^2}}{h} = \frac{2}{\sqrt{4 + y^2}}$$

Esta función tampoco es convexa puesto que, denotando por  $x = (-1, 1)$  y por  $y = (1, 1)$ , se cumple que  $f(x) = \|x - a_1\| = \sqrt{2} = \|y - a_2\| = f(y)$

Por otra parte, también se cumple que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y\right) &= f(0, 1) = \sqrt{5} > \\ &> \sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot f(x) + \frac{1}{2} \cdot f(y) \end{aligned}$$



con lo que, podemos asegurar, que esta función ni es diferenciable ni es convexa. ■

Sin embargo, técnicas más depuradas de optimización restringida, suavizan la exigencia de la diferenciability por otra condición menos restrictiva, como es el carácter Lipschitziano de la función objetivo, cualidad de la que goza nuestra función, como estaremos en disposición de probar utilizando el siguiente lema técnico:

**Lema 4.1.1.** Sean  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m)$  dos vectores de  $\mathbb{R}^m$  tales que  $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_m$ ,  $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_m$ , sean  $\sigma$  y  $\tau$  dos permutaciones en el conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  y definamos

$$F(\sigma, \tau) = \sum_{i=1}^m u_{\sigma(i)} \cdot v_{\tau(i)}$$

Entonces el máximo de  $F(\sigma, \tau)$  se alcanza cuando ambas permutaciones son la identidad.

*Demostración:*

Es evidente que existe una matriz  $X$  de tamaño  $m \times m$  de ceros y unos teniendo un único uno por cada fila y columna de tal forma que se cumple que

$$F(\sigma, \tau) = \sum_{i=1}^m u_{\sigma(i)} \cdot v_{\tau(i)} = \vec{u} \cdot X \cdot \vec{v}^t$$

Así, habremos probado el resultado propuesto si comprobamos que, en tal caso, siendo  $I_m$  la matriz identidad de tamaño  $m \times m$ , se cumple que

$$\vec{u} \cdot X \cdot \vec{v}^t \leq \vec{u} \cdot I_m \cdot \vec{v}^t$$

Probaremos esta desigualdad por inducción sobre el tamaño de la matriz:

- Para  $m = 1$  es trivialmente cierta puesto que  $u_1 \cdot v_1 \leq u_1 \cdot v_1$
- Para  $m = 2$  la desigualdad también es cierta puesto que:
  - si  $X = I_2$ , se verifica trivialmente
  - si  $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , se cumple que

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot X \cdot \vec{v}^t &= u_1 \cdot v_2 + u_2 \cdot v_1 = u_1 \cdot (v_2 - v_1 + v_1) + u_2 \cdot (v_1 - v_2 + v_2) = \\ &= u_1 \cdot (v_2 - v_1) + u_2 \cdot (v_1 - v_2) + u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = \\ &= (u_1 - u_2) \cdot (v_2 - v_1) + u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 \leq u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = \vec{u} \cdot I_2 \cdot \vec{v}^t \end{aligned}$$

puesto que  $u_1 - u_2 \leq 0$  ya que  $u_1 \leq u_2$  y  $v_2 - v_1 \geq 0$  ya que  $v_1 \leq v_2$ .

- Así, supongamos que se verifica la desigualdad para un cierto  $m \in \mathbb{N}$  y comprobemos que se verifica para  $m + 1$ .
  - Si  $x_{m+1, m+1} = 1$ , entonces siendo  $X_{m+1}$  la matriz resultante al eliminar la última fila y columna de la matriz  $X$ ,  $\vec{u}_*$  el vector resultante de eliminar la última componente del vector  $\vec{u}$  y  $\vec{v}_*$  el vector resultante de eliminar la última componente del vector  $\vec{v}$  se obtiene que

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot X \cdot \vec{v}^t &= \vec{u}_* \cdot X_{m+1} \cdot \vec{v}_*^t + u_{m+1} \cdot v_{m+1} \leq \\ &\leq \vec{u}_* \cdot I_m \cdot \vec{v}_*^t + u_{m+1} \cdot v_{m+1} = \vec{u} \cdot I_{m+1} \cdot \vec{v}^t \end{aligned}$$

– En caso contrario, si  $x_{i,m+1} = 1 = x_{m+1,j}$ , denotemos por  $X_{m-1}$  a la matriz resultante al eliminar de  $X$  las filas  $i$  y  $m + 1$  y las columnas  $j$  y  $m + 1$ , por  $\vec{u}_{**}$  el vector resultante de eliminar tanto la última como la  $i$ -ésima componente del vector  $\vec{u}$  y  $\vec{v}_{**}$  el vector resultante de eliminar tanto la última como la  $j$ -ésima componente del vector  $\vec{v}$ . Así, la matriz  $X_{m-1}$  es de tamaño  $(m - 1) \times (m - 1)$  y podemos afirmar que

$$\vec{u} \cdot X \cdot \vec{v}^t = \vec{u}_{**} \cdot X_{m-1} \cdot \vec{v}_{**}^t + u_i \cdot v_{m+1} + u_{m+1} \cdot v_j \leq$$

$$(\text{puesto que } u_i \leq u_{m+1} \text{ y } v_j \leq v_{m+1})$$

$$\leq \vec{u}_{**} \cdot X_{m-1} \cdot \vec{v}_{**}^t + u_i \cdot v_j + u_{m+1} \cdot v_{m+1} = \vec{u}_* \cdot X_m \cdot \vec{v}_*^t + u_{m+1} \cdot v_{m+1} \leq$$

(siendo  $X_m$  la matriz  $X_{m-1}$  en la que hemos añadido una fila en la posición  $i$  y una columna en la posición  $j$  que tiene un uno en la posición  $ij$  y el resto son ceros,  $\vec{u}_*$  el vector resultante al eliminar la última componente del vector  $\vec{u}$  y  $\vec{v}_*$  el vector resultante al eliminar la última componente del vector  $\vec{v}$  ).

$$\leq \vec{u}_* \cdot I_m \cdot \vec{v}_*^t + u_{m+1} \cdot v_{m+1} = \vec{u} \cdot I_{m+1} \cdot \vec{v}^t$$

**Teorema 4.1.1.**  $f(x)$  verifica una condición de Lipschitz. Concretamente, siendo  $k_{\mu(i)} \leq k_{\mu(i+1)}$  y  $w_{v(i)} \leq w_{v(i+1)}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m - 1$ , se cumple que

$$|f(x) - f(y)| \leq M \cdot \|x - y\|, \text{ para todo } x, y \in S$$

siendo la constante  $M = \sum_{i=1}^m k_{\mu(i)} w_{v(i)}$

*Demostración:*

Si, tomados dos puntos  $x$  e  $y$  de  $S$ , tienen asociados la misma permutación  $\sigma$ , es decir,

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x - a_{\sigma(m)}\|$$

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|y - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|y - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|y - a_{\sigma(m)}\|$$

entonces, utilizando el lema anterior, se verifica que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\sigma(i)} \cdot (\|x - P_{\sigma(i)}\| - \|y - P_{\sigma(i)}\|) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\sigma(i)} \cdot \left| \|x - P_{\sigma(i)}\| - \|y - P_{\sigma(i)}\| \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \|x - y\| \cdot \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\sigma(i)} \leq M \cdot \|x - y\|$$

Si, por el contrario, los puntos  $x$  e  $y$  no tienen asociados la misma permutación, podemos dividir el segmento  $I = [x, y]$  en subsegmentos de tal forma que, en cada uno de ellos, la permutación asociada sea la misma para todos los puntos de él. Así, si denotamos por  $x'$  e  $y'$  a los vértices de uno de ellos y por  $\tau$  la permutación correspondiente, en virtud de lo probado anteriormente podemos afirmar que

$$|f(x') - f(y')| \leq \|x' - y'\| \cdot \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\tau(i)} \leq M \cdot \|x' - y'\|$$

lo que, unido a la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |(f(x) - f(x')) + (f(x') - f(y')) + (f(y') - f(y))| \leq \\ &\leq |f(x) - f(x')| + |f(x') - f(y')| + |f(y') - f(y)| \end{aligned}$$

nos permite garantizar la veracidad del enunciado propuesto. ■

## 4.2. Determinación de puntos candidatos a solución

Como, en general, no podemos garantizar ni la convexidad ni la diferenciabilidad de nuestras funciones objetivo, no podemos utilizar los métodos clásicos de búsqueda de óptimos. Alternativamente, restringiremos el conjunto factible de soluciones y así, consideraremos nuestro problema resuelto, si dicho conjunto lo podemos reducir a un conjunto finito.

Aunque tan drástica reducción puede que no sea posible para todas las normas, sí que es posible, por ejemplo, cuando consideremos, entre otras, la norma euclídea que es la utilizada habitualmente en las aplicaciones prácticas. De todas formas, las propiedades que estudiamos a continuación nos permiten restringir sensiblemente el conjunto de puntos candidatos a solución, por lo que serán de gran ayuda para la construcción de algoritmos de aproximación.

Observemos, en primer lugar, que la solución de los problemas ordenados de centros peligrosos puede no ser única, pero podremos eliminar un punto candidato siempre que encontremos otro que sea igual o mejor que el anterior. Así, en una primera aproximación, utilizaremos el concepto de dominancia para poner de manifiesto que podemos eliminar los puntos del interior de  $S$  que no sean de la envolvente convexa de los puntos  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , como se prueba en la siguiente proposición:

**Proposición 4.2.1.** *Siendo  $X$  la envolvente convexa de  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , existe algún punto  $x^* \in (S \cap X) \cup (Fr(S) - X)$  tal que se verifica que  $f(x) \leq f(x^*)$  para todo  $x \in S$ .*

*Demostración:*

Como la función objetivo es continua y el conjunto  $S$  es cerrado y acotado, sabemos que existe  $x_0 \in S$  tal que  $f(x) \leq f(x_0)$  para todo  $x \in S$ . Si  $x_0 \in S \cap X$  habríamos terminado; supongamos, entonces, que  $x_0 \in S - X$ .

En virtud del teorema 3.3.1, tenemos asegurada la existencia de algún  $x^* \in Fr(S) - X$  tal que  $x_0 \preceq x^*$ . Puesto que nuestras funciones objetivo son isótonas (ver proposición 4.1.2), se tendría que  $f(x_0) \leq f(x^*)$ , con lo que  $x^*$  también sería un máximo de  $f$ . ■

Por tanto, con independencia de que pudieran existir otras soluciones, siempre podemos encontrar alguna en el conjunto  $S \cap (Fr(S) \cup X)$ ; es decir, podemos eliminar del conjunto factible todos los puntos del conjunto  $S - X$ . Sin embargo, el conjunto  $S \cap (Fr(S) \cup X)$  sigue siendo demasiado extenso para nuestro propósito.

Para conseguir reducir aún más el conjunto de posibles soluciones, en adelante, le exigiremos al conjunto  $S$  sobre el que queremos maximizar  $f(x)$  que, además de ser cerrado y acotado, también sea poligonal. En principio, esta condición puede parecer demasiado restrictiva, pero en el contexto en el que se plantean los problemas de localización de un centro no deseado, cualquier región geográfica se puede aproximar tanto como queramos mediante una región poligonal, con lo que tal restricción es consecuencia de la naturaleza del problema real que queremos modelar.

Bajo esta hipótesis, el siguiente teorema nos permite reducir el conjunto de puntos candidatos a óptimos que están en la frontera de  $S$ .

**Teorema 4.2.1.** *Si  $x_0$  es un máximo de  $f(x)$  en la región  $S$ ,  $x_0 \in Fr(S)$  y  $\sigma$  es una permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  tal que*

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(m)}\|$$

*entonces existe algún punto  $x^* \in Fr(S)$  tal que  $f(x^*) = f(x_0)$  verificando que*

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x^* - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x^* - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x^* - a_{\sigma(m)}\|$$

*donde  $x^*$  es, o bien un vértice de  $S$  o bien existe  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  tal que*

$$w_{\sigma(i)} \cdot \|x^* - a_{\sigma(i)}\| = w_{\sigma(i+1)} \cdot \|x^* - a_{\sigma(i+1)}\|$$

*Demostración:*

Si  $x_0$  fuera un vértice de  $S$ , o si existiera  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  tal que

$$w_{\sigma(i)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(i)}\| = w_{\sigma(i+1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(i+1)}\|$$

habríamos acabado; supongamos, entonces, que  $x_0$  no es un vértice de  $S$  y que para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  se verifica que

$$w_{\sigma(i)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(i)}\| < w_{\sigma(i+1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(i+1)}\|$$

Como toda norma es una función continua, existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in B(x_0, \delta)$  se cumple que

$$w_{\sigma(i)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(i)}\| \leq w_{\sigma(i+1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(i+1)}\|, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$$

Sea  $L$  la arista de  $S$  que contiene a  $x_0$  y, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  definamos los siguientes conjuntos:

$$L_i = \{x \in S \mid w_{\sigma(i)} \cdot \|x - a_{\sigma(i)}\| = w_{\sigma(i+1)} \cdot \|x - a_{\sigma(i+1)}\|\}$$

Puede suceder:

-  $L_i \cap L = \emptyset$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ . En tal caso, tomemos como  $x^*$  el extremo de  $L$  más cercano a  $x_0$  y consideremos el conjunto

$$A = \{x \in S \mid x \in B(x_0, \delta) \cap L\}$$

que no es vacío, puesto que  $x_0 \in A$ , y además, para todo  $x \in A$ , se cumple que

$$w_{\sigma(i)} \cdot \|x - a_{\sigma(i)}\| \leq w_{\sigma(i+1)} \cdot \|x - a_{\sigma(i+1)}\|, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$$

Sea  $\lambda \in (1, 1 + \frac{\delta}{\|x^* - x_0\|})$  y tomemos  $y = \lambda \cdot x_0 + (1 - \lambda) \cdot x^*$  que per-

tenece a  $A$  ya que está en  $L$ , por estar alineado con  $x^*$  y con  $x_0$ , y también cumple que

$$\|y - x_0\| = \|\lambda \cdot x_0 + (1 - \lambda) \cdot x^* - x_0\| = (\lambda - 1) \cdot \|x^* - x_0\| < \delta$$

Por otra parte, se tiene que  $x_0 = \frac{1}{\lambda} \cdot y + \frac{\lambda - 1}{\lambda} \cdot x^*$

De todo esto, se sigue inmediatamente que:

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\sigma(i)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(i)}\| = \\
&= \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\sigma(i)} \cdot \left\| \frac{1}{\lambda} \cdot (y - a_{\sigma(i)}) + \frac{\lambda-1}{\lambda} (x^* - a_{\sigma(i)}) \right\| \leq \\
&\leq \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\sigma(i)} \cdot \|y - a_{\sigma(i)}\| + \frac{\lambda-1}{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\sigma(i)} \cdot \|x^* - a_{\sigma(i)}\| = \\
&= \frac{1}{\lambda} \cdot f(y) + \frac{\lambda-1}{\lambda} \cdot f(x^*) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot f(x_0) + \frac{\lambda-1}{\lambda} \cdot f(x^*)
\end{aligned}$$

Por tanto,  $f(x_0) \leq f(x^*)$  lo que, unido a la desigualdad contraria que se verifica por ser  $x_0$  un máximo de  $f(x)$  en  $S$ , pondría fin a la demostración.

- Existe  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  tal que  $L_i \cap L \neq \emptyset$ . En tal caso consideremos el conjunto

$$\begin{aligned}
B &= \{x \in L \mid \exists i \in \{1, 2, \dots, m-1\} \text{ con} \\
&\quad w_{\sigma(i)} \cdot \|x - a_{\sigma(i)}\| = w_{\sigma(i+1)} \cdot \|x - a_{\sigma(i+1)}\|\}
\end{aligned}$$

y sea  $x^*$  el elemento de  $B$  más cercano a  $x_0$  y  $\delta^* = \min\{\delta, \|x^* - x_0\|\}$

El mismo procedimiento anterior, pero esta vez sobre el conjunto

$$A = \{x \in S \mid x \in B(x_0, \delta^*) \cap L\}$$

nos conduce de nuevo a que  $f(x_0) \leq f(x^*)$ , de donde  $f(x^*) = f(x_0)$

En cualquier caso, hemos localizado un punto  $x^*$  que es un vértice de la región  $S$  o bien existe  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  tal que se verifica que

$$w_{\sigma(i)} \cdot \|x^* - a_{\sigma(i)}\| = w_{\sigma(i+1)} \cdot \|x^* - a_{\sigma(i+1)}\|$$

■

Notemos que, en la búsqueda de óptimos de nuestra función objetivo, este resultado nos permite restringirnos a los puntos de la frontera de  $S$  que sean vértices de la poligonal o pertenezcan a la mediatriz ponderada asociada a algún par de poblaciones  $a_i$ . Los siguientes resultados nos asegurarán que también podemos restringir, mediante condiciones similares a las anteriores, los puntos candidatos a solución del interior de  $S$ .

**Teorema 4.2.2.** Si  $x_0$  es un punto interior de  $S$  tal que es un máximo de  $f(x)$  y  $\sigma$  una permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  tal que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(m)}\|$$

entonces existe algún punto  $x^* \in S$  tal que  $f(x^*) = f(x_0)$  verificando que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x^* - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x^* - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x^* - a_{\sigma(m)}\|$$

donde, o bien  $x^* \in Fr(S)$  o bien existe  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  tal que

$$w_{\sigma(i)} \cdot \|x^* - a_{\sigma(i)}\| = w_{\sigma(i+1)} \cdot \|x^* - a_{\sigma(i+1)}\|$$

*Demostración:*

Sea  $\sigma$  una permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  tal que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(m)}\|$$

Puesto que, si existe algún  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  tal que se verifica la igualdad  $w_{\sigma(i)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(i)}\| = w_{\sigma(i+1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(i+1)}\|$  habríamos terminado, supongamos que, para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  se cumple que

$$w_{\sigma(i)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(i)}\| < w_{\sigma(i+1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(i+1)}\|$$

Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  consideremos el conjunto

$$L_i = \{x \in S \mid w_{\sigma(i)} \cdot \|x - a_{\sigma(i)}\| = w_{\sigma(i+1)} \cdot \|x - a_{\sigma(i+1)}\|\}$$

- Si para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  se cumple que  $L_i \cap S = \emptyset$ , entonces la permutación  $\sigma$  es la misma para todo  $x \in S$ . Por tanto, tomemos como  $x_1$  cualquier punto de  $S$  tal que  $x_1 \neq x_0$  y tomemos como  $\lambda^* = \max\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \cdot x_0 + (1-\lambda) \cdot x_1 \in S\}$

$\lambda^* \geq 1$ , puesto que  $x_0 \in S$ . Además,  $x^* = \lambda^* \cdot x_0 + (1-\lambda^*) \cdot x_1 \in Fr(S)$ .

Por tanto, podemos escribir  $x_0 = \frac{1}{\lambda^*} \cdot x^* + \frac{\lambda^* - 1}{\lambda^*} \cdot x_1$

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\sigma(i)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(i)}\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\sigma(i)} \cdot \left\| \frac{1}{\lambda^*} \cdot (x^* - a_{\sigma(i)}) + \frac{\lambda^* - 1}{\lambda^*} \cdot (x_1 - a_{\sigma(i)}) \right\| \leq \\
&\leq \frac{1}{\lambda^*} \cdot \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\sigma(i)} \cdot \|x^* - a_{\sigma(i)}\| + \frac{\lambda^* - 1}{\lambda^*} \cdot \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\sigma(i)} \cdot \|x_1 - a_{\sigma(i)}\| = \\
&= \frac{1}{\lambda^*} \cdot f(x^*) + \frac{\lambda^* - 1}{\lambda^*} \cdot f(x_1) \leq \frac{1}{\lambda^*} \cdot f(x^*) + \frac{\lambda^* - 1}{\lambda^*} \cdot f(x_0)
\end{aligned}$$

Así, siguiendo el mismo procedimiento anterior, se tiene que

Por tanto,  $f(x_0) \leq f(x^*)$  lo que implica que  $x^*$  y  $f(x^*) = f(x_0)$  está en la frontera de  $S$

- Si, en caso contrario, existe  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  tal que  $L_i \cap S \neq \emptyset$ , consideremos el conjunto

$$A = \left\{ x \in S \mid w_{\sigma(1)} \cdot \|x - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x - a_{\sigma(m)}\| \right\}$$

- Como todas las desigualdades que definen a  $A$  son estrictas en  $x_0$ , entonces  $x_0$  es un punto interior de  $A$  y, por la continuidad de la norma, podemos afirmar que existe  $\delta > 0$  tal que  $B(x_0, \delta) \subset A$ . Sea  $x_1$  cualquier punto de  $B(x_0, \delta) \subset A$  tal que  $x_1 \neq x_0$  y tomemos como  $\lambda^* = \max\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \cdot x_0 + (1-\lambda) \cdot x_1 \in A\}$

De nuevo, podemos afirmar que  $\lambda^* \geq 1$ , puesto que  $x_0 \in B(x_0, \delta) \subset A$ . Sea  $x^* = \lambda^* \cdot x_0 + (1-\lambda^*) \cdot x_1$ , entonces

- o bien,  $x^* \in Fr(S)$ , con lo que el mismo razonamiento del caso anterior nos conduciría a que  $f(x^*) = f(x_0)$  y habríamos acabado la demostración.

$$w_{\sigma(i)} \cdot \|x^* - a_{\sigma(i)}\| = w_{\sigma(i+1)} \cdot \|x^* - a_{\sigma(i+1)}\|$$

- o bien,  $x^* \in Fr(A)$ , con lo que existiría  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  tal que

y de nuevo, el mismo razonamiento anterior nos conduciría a que  $f(x^*) = f(x_0)$ , con lo que, de cualquier forma, podemos garantizar la veracidad del teorema. ■

Además, podemos ser un poco más precisos en las conclusiones del teorema anterior, y utilizar el siguiente para reducir todavía más el conjunto posibles soluciones del interior de  $S$ .

**Teorema 4.2.3.** Si  $x_0$  es un punto interior de  $S$  tal que es un máximo de  $f(x)$ , entonces existe algún punto  $\tilde{x} \in S$  tal que  $f(x_0) = f(\tilde{x})$  verificando que, o bien  $\tilde{x} \in Fr(S)$  o bien existe una permutación  $\sigma$  del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  y existen  $i, j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  con  $i \neq j$  tales que se verifican las dos siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} w_{\sigma(i)} \cdot \| \tilde{x} - a_{\sigma(i)} \| &= w_{\sigma(i+1)} \cdot \| \tilde{x} - a_{\sigma(i+1)} \| \\ w_{\sigma(j)} \cdot \| \tilde{x} - a_{\sigma(j)} \| &= w_{\sigma(j+1)} \cdot \| \tilde{x} - a_{\sigma(j+1)} \| \end{aligned}$$

*Demostración:*

Sea  $x_0$  un punto interior de  $S$  tal que es un máximo de  $f(x)$  y  $\tau$  la permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  tal que

$$w_{\tau(1)} \cdot \| x_0 - a_{\tau(1)} \| \leq w_{\tau(2)} \cdot \| x_0 - a_{\tau(2)} \| \leq \dots \leq w_{\tau(m)} \cdot \| x_0 - a_{\tau(m)} \|$$

En virtud del teorema anterior, podemos asegurar que existe un punto  $x^* \in S$  tal que  $f(x_0) = f(x^*)$  y, o bien  $x^* \in Fr(S)$ , o bien, existe  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  tal que

$$w_{\tau(i)} \cdot \| x^* - a_{\tau(i)} \| = w_{\tau(i+1)} \cdot \| x^* - a_{\tau(i+1)} \|$$

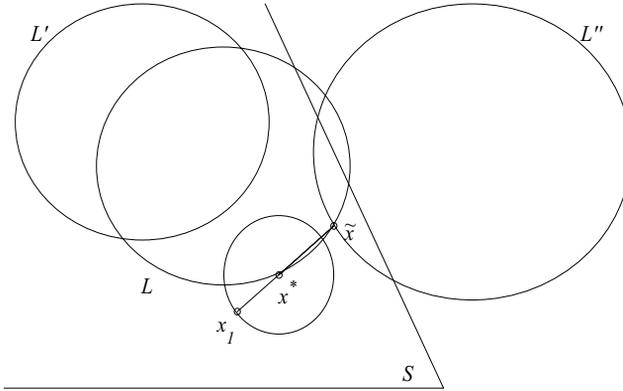
Puesto que si  $x^* \in Fr(S)$  habríamos acabado, supongamos que existe  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  tal que

$$w_{\tau(i)} \cdot \| x^* - a_{\tau(i)} \| = w_{\tau(i+1)} \cdot \| x^* - a_{\tau(i+1)} \|$$

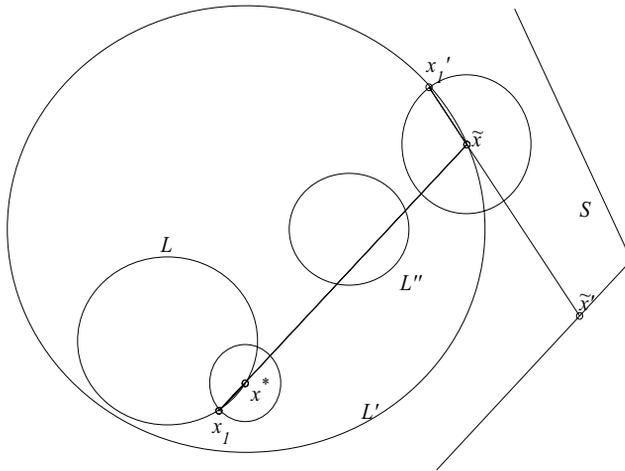
Consideremos los siguientes conjuntos:

- $L = \{x \in S \mid w_{\tau(i)} \cdot \| x - a_{\tau(i)} \| = w_{\tau(i+1)} \cdot \| x - a_{\tau(i+1)} \| \}$
- $T_1 = \{x \in S \mid$   
 $w_{\tau(1)} \cdot \| x - a_{\tau(1)} \| \leq \dots \leq w_{\tau(i-1)} \cdot \| x - a_{\tau(i-1)} \| \leq w_{\tau(i)} \cdot \| x - a_{\tau(i)} \| \leq$   
 $\leq w_{\tau(i+1)} \cdot \| x - a_{\tau(i+1)} \| \leq w_{\tau(i+2)} \cdot \| x - a_{\tau(i+2)} \| \leq \dots \leq w_{\tau(m)} \cdot \| x - a_{\tau(m)} \| \}$
- $T_2 = \{x \in S \mid$   
 $w_{\tau(1)} \cdot \| x - a_{\tau(1)} \| \leq \dots \leq w_{\tau(i-1)} \cdot \| x - a_{\tau(i-1)} \| \leq w_{\tau(i+1)} \cdot \| x - a_{\tau(i+1)} \| \leq$   
 $\leq w_{\tau(i)} \cdot \| x - a_{\tau(i)} \| \leq w_{\tau(i+2)} \cdot \| x - a_{\tau(i+2)} \| \leq \dots \leq w_{\tau(m)} \cdot \| x - a_{\tau(m)} \| \}$
- $T = T_1 \cup T_2$

Puesto que si  $x^* \in Fr(S)$  habríamos terminado, supongamos que existe  $\delta > 0$  tal que  $B(x^*, \delta) \subset T$ . Distingamos ahora las dos siguientes posibilidades (esquemas en la figura 4.1):



*Caso I: La mediatriz L se interseca con Fr(S) y/o con otra mediatriz*



*Caso II: La mediatriz L no se interseca con Fr(S) ni con otra mediatriz*

- La mediatriz  $L$  se interseca con alguna otra mediatriz y/o con la frontera de  $S$ . En tal caso, denotemos por  $\tilde{x}$  al punto más cercano a  $x^*$  de entre todos los puntos de intersección y sea

$$x_1 = \left( \frac{\delta}{\|x^* - \tilde{x}\|} + 1 \right) \cdot x^* - \frac{\delta}{\|x^* - \tilde{x}\|} \cdot \tilde{x}$$

Puesto que, por una parte, tanto  $x^*$  como  $\tilde{x}$  están en  $T_1 \cap T_2$ , y por otra parte,  $x_1$  estará en  $T_1$  o en  $T_2$  puesto que  $\|x_1 - x^*\| = \delta$  y  $B(x^*, \delta) \subset T$ , podemos afirmar que existe una permutación  $\rho$ , común a los tres puntos, que nos permite evaluar la función  $f$

Puesto que el punto  $x^*$  lo podemos reescribir como

$$x^* = \frac{\|x^* - \tilde{x}\|}{\|x^* - \tilde{x}\| + \delta} \cdot x_1 + \frac{\delta}{\|x^* - \tilde{x}\| + \delta} \cdot \tilde{x}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} f(x^*) &= \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\rho(i)} \cdot \|x^* - a_{\rho(i)}\| = \\ &= \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\rho(i)} \cdot \left\| \frac{\|x^* - \tilde{x}\|}{\|x^* - \tilde{x}\| + \delta} \cdot (x_1 - a_{\rho(i)}) + \frac{\delta}{\|x^* - \tilde{x}\| + \delta} (\tilde{x} - a_{\rho(i)}) \right\| \leq \\ &\leq \frac{\|x^* - \tilde{x}\|}{\|x^* - \tilde{x}\| + \delta} \cdot \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\rho(i)} \cdot \|x_1 - a_{\rho(i)}\| + \\ &+ \frac{\delta}{\|x^* - \tilde{x}\| + \delta} \cdot \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\rho(i)} \cdot \|\tilde{x} - a_{\rho(i)}\| = \\ &= \frac{\|x^* - \tilde{x}\|}{\|x^* - \tilde{x}\| + \delta} \cdot f(x_1) + \frac{\delta}{\|x^* - \tilde{x}\| + \delta} \cdot f(\tilde{x}) \leq \\ &\leq \frac{\|x^* - \tilde{x}\|}{\|x^* - \tilde{x}\| + \delta} \cdot f(x^*) + \frac{\delta}{\|x^* - \tilde{x}\| + \delta} \cdot f(\tilde{x}) \end{aligned}$$

De donde se deduce que,  $f(x^*) \leq f(\tilde{x})$  lo que, unido a la desigualdad contraria que se verifica por ser  $x^*$  es un máximo de  $f(x)$  en  $S$ , pondría fin a la demostración.

- La mediatriz  $L$  no se interseca con ninguna otra mediatriz ni con la frontera de  $S$ . En tal caso, en virtud de la proposición 4.3.2, podemos elegir  $x_1 \in (L \cap B(x^*, \delta))$  con  $x_1 \neq x^*$

Observemos que tanto  $x_1$  como  $x^*$  están tanto en  $T_1$  como en  $T_2$ . Así

$$\lambda^* = \max \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \cdot x^* + (1 - \lambda) \cdot x_1 \in T \}$$

cumplirá que  $\lambda^* \geq 1$  puesto que  $x^* \in T$

Además el punto  $\tilde{x} = \lambda^* \cdot x^* + (1 - \lambda^*) \cdot x_1$  estará en  $T_1$  o en  $T_2$ , pero, de cualquier forma, la permutación que nos permite evaluarlo es la misma para  $x^*$ ,  $\tilde{x}$  y  $x_1$

Denotándola por  $\rho$  y puesto que  $x^* = \frac{1}{\lambda^*} \cdot \tilde{x} + \frac{\lambda^* - 1}{\lambda^*} \cdot x_1$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} f(x^*) &= \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\rho(i)} \cdot \|x^* - a_{\rho(i)}\| = \\ &= \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\rho(i)} \cdot \left\| \frac{1}{\lambda^*} \cdot (\tilde{x} - a_{\rho(i)}) + \frac{\lambda^* - 1}{\lambda^*} (x_1 - a_{\rho(i)}) \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda^*} \cdot \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\rho(i)} \cdot \|\tilde{x} - a_{\rho(i)}\| + \frac{\lambda^* - 1}{\lambda^*} \cdot \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\rho(i)} \cdot \|x_1 - a_{\rho(i)}\| = \\ &= \frac{1}{\lambda^*} \cdot f(\tilde{x}) + \frac{\lambda^* - 1}{\lambda^*} \cdot f(x_1) \leq \frac{1}{\lambda^*} \cdot f(\tilde{x}) + \frac{\lambda^* - 1}{\lambda^*} \cdot f(x^*) \end{aligned}$$

De donde se deduce que,  $f(x^*) \leq f(\tilde{x})$  lo que, unido a la desigualdad contraria que se verifica por ser  $x^*$  es un máximo de  $f(x)$  en  $T$ , nos lleva a que en  $\tilde{x}$  también se alcanza el máximo de la función objetivo y, reiterando este proceso o el descrito en el caso anterior, a lo sumo tantas veces como mediatrices, también pondríamos fin a la demostración de este teorema. ■

En conclusión, podemos afirmar que, siendo  $S$  una región poligonal, cerrada y acotada,  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  puntos del plano y  $X$  su envolvente convexa, entonces existe algún punto en el conjunto  $V \cup I \cup (E \cap X)$  que es máximo global de nuestra función  $f$  sobre  $S$ , siendo

- $V$  el conjunto de vértices de  $S$ .
- $I$  el conjunto de puntos  $x$  de la frontera de  $S$  tales que existe alguna pareja  $(a_i, a_j)$  de puntos distintos de  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  verificando que

$$w_i \cdot \|x - a_i\| = w_j \cdot \|x - a_j\|$$

- $E$  el conjunto de puntos  $x$  interiores de  $S$  tales que existen dos parejas distintas  $(a_p, a_q)$  y  $(a_r, a_s)$  de puntos distintos de  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  verificando que

$$w_p \cdot \|x - a_p\| = w_q \cdot \|x - a_q\| \quad \text{y} \quad w_r \cdot \|x - a_r\| = w_s \cdot \|x - a_s\|$$

En ocasiones, este conjunto podría reducirse aún más y así, por ejemplo, las soluciones para el problema "maxisum" sobre una región poligonal siempre se encontrarán en alguno de sus vértices, puesto que la correspondiente función objetivo es, evidentemente, convexa, ya que es

$$f(x) = \sum_{i=1}^m w_i \cdot \|x - a_{\sigma(i)}\|$$

En general, juegan un papel fundamental los conjuntos que nos permiten seleccionar, tanto de la frontera de  $S$  como de la envolvente convexa de los puntos afectados, un conjunto de puntos candidatos a solución de cualquiera de nuestros problemas de localización de un centro no deseado. Dedicemos el final de este capítulo a poner de relieve algunas diferencias estructurales de dichos conjuntos y algunas propiedades invariantes para diferentes normas.

### 4.3. Mediatrices

Sea  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$  un espacio vectorial normado sobre  $\mathbb{R}^2$  y sean  $P$  y  $Q$  dos puntos distintos de  $\mathbb{R}^2$  a los que tenemos asociados dos magnitudes escalares positivas  $w_p$  y  $w_q$ , respectivamente. Llamaremos mediatriz ponderada (o mediatriz, abusando del término) relativa a los puntos  $P$  y a  $Q$ , al conjunto

$$M(P, Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } w_p \cdot \|x - P\| = w_q \cdot \|x - Q\| \right\}$$

Las propiedades geométricas y/o topológicas de estos conjuntos pueden ser sensiblemente diferentes al utilizar una norma u otra, como se puede observar en los dos siguientes ejemplos:

#### EJEMPLO 6

En el caso en el que la norma sea la euclídea, los conjuntos  $M(P, Q)$  son

- si  $w_p = w_q$ , rectas perpendiculares al segmento que une  $P$  con  $Q$  y que pasan por el punto medio.
- si  $w_p \neq w_q$ , circunferencias de centro  $C$  y radio  $r$  siendo

$$C = \frac{w_p^2}{w_p^2 - w_q^2} \cdot P - \frac{w_q^2}{w_p^2 - w_q^2} \cdot Q \quad ; \quad r = \frac{w_p \cdot w_q \cdot \|P - Q\|}{|w_p^2 - w_q^2|}$$



**EJEMPLO 7**

Sin embargo, en general, la dimensión del conjunto de puntos que equidisten de dos puntos dados, no tiene que ser uno, como sucede en el caso en el que nuestra norma sea, por ejemplo, la  $\|\cdot\|_1$  definida como  $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$

Considerando los puntos  $P = (-1, 1)$  y  $Q = (1, -1)$ , el conjunto

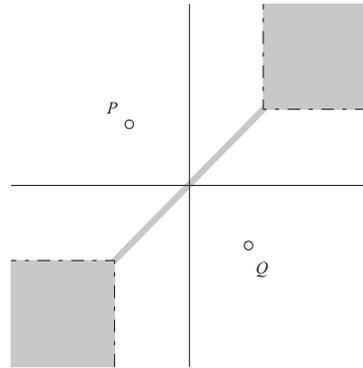
$$M(P, Q) = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } \|x - P\|_1 = \|x - Q\|_1\}$$

sombreado en la figura, lo podemos expresar como  $M(P, Q) = M_1 \cup M_2 \cup M_3$  siendo

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \min\{-x, -y\} \geq 1\}$$

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$$

$$M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \min\{x, y\} \geq 1\}$$



Como se muestra a continuación, independientemente de la norma utilizada, los conjuntos cerrados  $M(P, Q)$  nunca son vacíos.

**Proposición 4.3.1.** Siendo  $P$  y  $Q$  dos puntos distintos de  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ , y siendo  $w_P$  y  $w_Q$  dos escalares positivos, se cumple que

$$M(P, Q) = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } w_P \cdot \|x - P\| = w_Q \cdot \|x - Q\|\} \neq \emptyset$$

*Demostración:*

El punto  $\frac{w_P}{w_P + w_Q} \cdot P + \frac{w_Q}{w_P + w_Q} \cdot Q \in M(P, Q)$  puesto que

$$w_P \cdot \left\| \frac{w_P}{w_P + w_Q} \cdot P + \frac{w_Q}{w_P + w_Q} \cdot Q - P \right\| = \frac{w_P \cdot w_Q}{w_P + w_Q} \cdot \|P - Q\|$$

$$w_Q \cdot \left\| \frac{w_P}{w_P + w_Q} \cdot P + \frac{w_Q}{w_P + w_Q} \cdot Q - Q \right\| = \frac{w_P \cdot w_Q}{w_P + w_Q} \cdot \|P - Q\|$$

Además, esta demostración nos ha permitido encontrar un punto del conjunto  $M(P, Q)$  que está en la recta que pasa por  $P$  y por  $Q$  (recta que denotaremos por  $R_{PQ}$ ). Independientemente de esa demostración, es sencillo determinar qué puntos de la recta  $R_{PQ}$  pertenecen a la mediatriz ponderada, puesto que serán aquellos  $x_\lambda = \lambda \cdot P + (1 - \lambda) \cdot Q$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$  que cumplan que  $w_P \cdot \|x_\lambda - P\| = w_Q \cdot \|x_\lambda - Q\|$ . Así, para determinarlos bastará con determinar los valores  $\lambda \in \mathbb{R}$  tales que  $w_P \cdot |1 - \lambda| = w_Q \cdot |\lambda|$

- Existirá alguna solución con  $\lambda < 0$  si  $w_P(1 - \lambda) = -\lambda w_Q$ ; es decir, si  $\lambda = \frac{w_P}{w_P - w_Q} < 0$ , lo cual sólo sucede cuando  $w_P < w_Q$  puesto que hemos supuesto que  $w_P$  y  $w_Q$  son positivos.
- Siempre existirá alguna solución con  $0 < \lambda < 1$  puesto que se cumple que  $\lambda = \frac{w_P}{w_P + w_Q} \in (0, 1)$
- Existirá alguna solución con  $\lambda > 0$  si  $w_P(\lambda - 1) = \lambda w_Q$ ; es decir, si  $\lambda = \frac{w_P}{w_P - w_Q} > 1$ , lo cual sólo sucede cuando  $w_P > w_Q$  puesto que hemos supuesto que  $w_P$  y  $w_Q$  son positivos.

En resumen,

$$\begin{aligned}
 - M(P, Q) \cap R_{PQ} &= \left\{ \frac{P+Q}{2} \right\} \text{ si } w_P = w_Q \\
 - M(P, Q) \cap R_{PQ} &= \left\{ \begin{aligned} &\frac{w_P}{w_P - w_Q} \cdot P - \frac{w_Q}{w_P - w_Q} \cdot Q, \\ &\frac{w_P}{w_P + w_Q} \cdot P + \frac{w_Q}{w_P + w_Q} \cdot Q \end{aligned} \right\} \text{ si } w_P \neq w_Q
 \end{aligned}$$

Así, puesto que los conjuntos  $M(P, Q)$  son cerrados y no vacíos, en la proposición que demostraremos a partir del siguiente lema técnico, probaremos que, además, no tienen puntos aislados, es decir, que son conjuntos perfectos<sup>2</sup> y, por tanto, de la misma cardinalidad que el continuo:

**Lema 4.3.1.** *Sea  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$  un espacio normado,  $x_0$  un punto cualquiera de  $\mathbb{R}^2$  y  $R$  una recta cualquiera que pasa por  $x_0$ . Entonces, para cualquier  $\delta < 0$ , existe algún punto  $x^* \neq x_0$  tal que  $x^* \in (R \cap B(x_0, \delta))$*

<sup>2</sup> Un conjunto  $A$  de un espacio topológico se dice que es perfecto, si es cerrado, no vacío y no tiene puntos aislados.

*Demostración:*

Sea  $\delta^* \in (0, \delta)$  y sea  $x_1 \in R$  un punto cualquiera tal que  $x_1 \neq x_0$ . Si las coordenadas de estos puntos son  $x_0 = (x_{01}, x_{02})$  y  $x_1 = (x_{11}, x_{12})$ , denotemos por  $Q = (x_{12} - x_{02}, x_{01} - x_{11})$ , por  $k = x_{02} \cdot x_{11} - x_{01} \cdot x_{12}$  y consideremos la función  $F(x) = \langle x, Q \rangle + k$ .

Entonces, el punto  $x^* = x_0 + \delta^* \cdot \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|}$  cumple que  $F(x^*) = 0$ ,

puesto que se verifica que  $F(x_0) = \langle x_0, Q \rangle + k = 0 = \langle x_1, Q \rangle + k = F(x_1)$ , que  $\|x^* - x_0\| = \delta^* < \delta$  y, también se tiene que

$$\begin{aligned} F(x^*) &= \left\langle x_0 + \delta^* \cdot \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|}, Q \right\rangle + k = \\ &= \langle x_0, Q \rangle + k + \frac{\delta^*}{\|x_1 - x_0\|} \cdot \langle x_1, Q \rangle - \frac{\delta^*}{\|x_1 - x_0\|} \cdot \langle x_0, Q \rangle = \\ &= \frac{\delta^*}{\|x_1 - x_0\|} \cdot (-k) - \frac{\delta^*}{\|x_1 - x_0\|} \cdot (-k) = 0 \end{aligned}$$

lo que, en virtud de la proposición 3.2.1, equivale a que  $x^*$  está alineado con  $x_0$  y con  $x_1$  (y, por tanto, en la recta que determinan), lo que pone fin a esta demostración. ■

Como comentábamos, haciendo uso de este lema, la siguiente proposición pone de manifiesto que  $M(P, Q)$  no tiene puntos aislados:

**Proposición 4.3.2.** Sean  $P$  y  $Q$  dos puntos distintos de  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ ,  $w_P$  y  $w_Q$  dos escalares positivos, y sea  $x^* \in \mathbb{R}^2$  tal que

$$w_P \cdot \|x^* - P\| = w_Q \cdot \|x^* - Q\|$$

Entonces, para cualquier  $\delta < 0$ , existe  $\tilde{x} \neq x^*$  tal que  $\tilde{x} \in B(x^*, \delta)$  y además

$$w_P \cdot \|\tilde{x} - P\| = w_Q \cdot \|\tilde{x} - Q\|$$

*Demostración:*

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $w_P \leq w_Q$ , denotemos por  $w = \frac{w_Q}{w_P} \geq 1$ , y consideremos la función

$$g(x) = \|x - P\| - w \cdot \|x - Q\|$$

que es continua por ser  $\|\cdot\|$  una función continua.

Así, habremos terminado si, fijado cualquier  $\delta < 0$ , comprobamos la existencia de algún punto  $\tilde{x} \neq x^*$  tal que  $\tilde{x} \in B(x^*, \delta)$  y además  $g(\tilde{x}) = 0$ .

Sea  $\delta^* < \min\{\delta, \|x^* - Q\|\}$  y consideremos los puntos

$$x_1 = \left(1 - \frac{\delta^*}{\|x^* - Q\|}\right) \cdot x^* + \frac{\delta^*}{\|x^* - Q\|} \cdot Q = x^* - \frac{\delta^*}{\|x^* - Q\|} \cdot (x^* - Q)$$

$$x_2 = \left(1 + \frac{\delta^*}{\|Q - x^*\|}\right) \cdot x^* - \frac{\delta^*}{\|x^* - Q\|} \cdot Q = x^* + \frac{\delta^*}{\|x^* - Q\|} \cdot (x^* - Q)$$

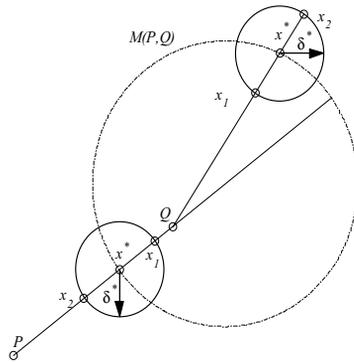
Tanto  $x_1$  como  $x_2$  están en  $B(x^*, \delta)$  puesto que se cumple que

$$\|x_1 - x^*\| = \delta^* < \delta$$

$$\|x_2 - x^*\| = \delta^* < \delta$$

Como si  $g(x_1) = 0$  ó  $g(x_2) = 0$  habríamos terminado, supongamos que  $g(x_1) \neq 0$  y que  $g(x_2) \neq 0$ .

Puesto que



$$\|x^* - P\| = \|x^* - x_1 + x_1 - P\| \leq \|x^* - x_1\| + \|x_1 - P\| \leq \delta^* + \|x_1 - P\|$$

podemos afirmar que  $\|x_1 - P\| \geq \|x^* - P\| - \delta^*$

Además, por otra parte, también se verifica que

$$\begin{aligned} \|x_1 - Q\| &= \left\| \left(1 - \frac{\delta^*}{\|x^* - Q\|}\right) \cdot (x^* - Q) \right\| = \\ &= \left(1 - \frac{\delta^*}{\|x^* - Q\|}\right) \cdot \|x^* - Q\| = \|x^* - Q\| - \delta^* \end{aligned}$$

Por tanto, se cumple que

$$g(x_1) \geq \|x^* - P\| - \delta^* - w \cdot \|x^* - Q\| + w \cdot \delta^* = \delta^*(w - 1) \geq 0$$

y, como hemos supuesto que  $g(x_1) \neq 0$ , se tiene que cumplir que  $g(x_1) > 0$ .

Razonando análogamente sobre  $x_2$  podemos afirmar que

$$\begin{aligned} \|x_2 - P\| &= \|x_2 - x^* + x^* - P\| \leq \|x_2 - x^*\| + \|x^* - P\| \leq \delta^* + \|x^* - P\| \\ \|x_2 - Q\| &= \left\| \left(1 + \frac{\delta^*}{\|x^* - Q\|}\right) \cdot (x^* - Q) \right\| = \\ &= \left(1 + \frac{\delta^*}{\|x^* - Q\|}\right) \cdot \|x^* - Q\| = \|x^* - Q\| + \delta^* \end{aligned}$$

con lo que, también se cumple que

$$g(x_2) \leq \|x^* - P\| + \delta^* - w \cdot \|x^* - Q\| - w \cdot \delta^* = \delta^*(1 - w) \leq 0$$

y, como hemos supuesto que  $g(x_2) \neq 0$ , se tiene que cumplir que  $g(x_2) < 0$

Por último, consideremos cualquier recta  $R$  que, pasando por  $x^*$ , no sea la determinada por  $x_1$ ,  $x^*$  y  $x_2$ . Por el lema 4.3.1, podemos afirmar la existencia de algún punto  $x_3 \neq x^*$  tal que  $x_3 \in (R \cap B(x^*, \delta^*))$  que, por construcción, no estará en la recta que determinan  $x_1$ ,  $x^*$  y  $x_2$ .

Si  $g(x_3) = 0$ , hemos terminado.

Si  $g(x_3) < 0$ , la continuidad de  $g$  nos permite afirmar la existencia de  $\tilde{\lambda} \in [0, 1]$  tal que  $\tilde{x} = \tilde{\lambda} \cdot x_1 + (1 - \tilde{\lambda}) \cdot x_3$  cumple que  $\tilde{x} \neq x^*$  y  $\tilde{x} \in B(x^*, \delta^*)$  puesto que  $B(x^*, \delta^*)$  es un conjunto convexo al que pertenecen  $x_1$  y  $x_3$ .

Del mismo modo, si  $g(x_3) > 0$ , existirá  $\tilde{\lambda} \in [0, 1]$  de tal forma que el punto  $\tilde{x} = \tilde{\lambda} \cdot x_2 + (1 - \tilde{\lambda}) \cdot x_3$  cumple que  $\tilde{x} \neq x^*$  y  $\tilde{x} \in B(x^*, \delta^*)$  puesto que  $B(x^*, \delta^*)$  es un conjunto convexo al que pertenecen  $x_2$  y  $x_3$ . ■

Tras haber puesto de manifiesto algunas de las propiedades topológicas de los conjuntos  $M(P, Q)$ , observemos también algunas propiedades geométricas, teniendo en cuenta la construcción que se detalla a continuación:

Sea  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$  un espacio vectorial normado sobre  $\mathbb{R}^2$  y sean  $P$  y  $Q$  dos puntos distintos de  $\mathbb{R}^2$  a los que tenemos asociados dos magnitudes escalares positivas  $w_P$  y  $w_Q$ , respectivamente. Denotaremos por

$$C_P = C\left(P, \frac{1}{w_P}\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } w_P \cdot \|x - P\| = 1\right\}$$

$$C_Q = C\left(Q, \frac{1}{w_Q}\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } w_Q \cdot \|x - Q\| = 1\right\}$$

Para todo punto  $x \neq P$ , llamaremos “punto base de  $x$  respecto a  $P$ ” al único punto  $x_P$  del rayo  $\overrightarrow{Px}$  que pertenece al conjunto  $C_P$ ; es decir, al punto  $x_P = \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot P$  con  $\lambda \geq 0$  tal que  $w_P \cdot \|x - P\| = 1$ . El valor  $\lambda$  correspondiente, obtenido de resolver la ecuación  $w_P \cdot \lambda \cdot \|x - P\| = 1$  es  $\lambda = \frac{1}{w_P \cdot \|x - P\|}$  con lo que

$$x_P = \frac{1}{w_P \cdot \|x - P\|} \cdot x + \left(1 - \frac{1}{w_P \cdot \|x - P\|}\right) \cdot P$$

de donde, siendo  $\|\cdot\|_2$  la norma euclídea, se cumple que

$$\|x_P - P\|_2 = \frac{\|x - P\|_2}{w_P \cdot \|x - P\|}$$

o equivalentemente

$$w_P \cdot \|x - P\| = \frac{\|x - P\|_2}{\|x_P - P\|_2}$$

Análogamente, para todo punto  $x \neq Q$ , llamaremos “punto base de  $x$  respecto a  $Q$ ” al único punto  $x_Q$  del rayo  $\overrightarrow{Qx}$  que pertenece al conjunto  $C_Q$  que, razonando de la misma forma, resulta ser

$$x_Q = \frac{1}{w_Q \cdot \|x - Q\|} \cdot x + \left(1 - \frac{1}{w_Q \cdot \|x - Q\|}\right) \cdot Q$$

verificándose también que

$$w_Q \cdot \|x - Q\| = \frac{\|x - Q\|_2}{\|x_Q - Q\|_2}$$

Puesto que anteriormente hemos determinado qué puntos de la recta que une  $P$  y  $Q$  son de la mediatriz, el siguiente lema nos permite determinar, a través de un procedimiento geométrico, los restantes puntos de la mediatriz.

**Lema 4.3.2.** *Para todo  $x \in M(P, Q)$ , la recta que pasa por los puntos base  $x_P$  y  $x_Q$  es paralela a la recta que pasa por  $P$  y por  $Q$ . Inversamente, si hay dos puntos  $U$  y  $V$  en  $C_P$  y  $C_Q$  respectivamente, tales que la recta que pasa por ellos es paralela y distinta a la que pasa por  $P$  y por  $Q$  y además los rayos  $\overline{PU}$  y  $\overline{QV}$  se cortan, entonces la intersección es un punto de la mediatriz.*

*Demostración:*

Considerando los triángulos de vértices  $\widehat{PxQ}$  y  $\widehat{x_Px_Q}$ , los lados  $\overline{PQ}$  y  $\overline{x_Px_Q}$  son paralelos si y sólo si

$$\frac{\|x - P\|_2}{\|x_P - P\|_2} = \frac{\|x - Q\|_2}{\|x_Q - Q\|_2}$$

lo que, en virtud del comentario anterior, equivale a que  $x \in M(P, Q)$  puesto que  $w_P \cdot \|x - P\| = w_Q \cdot \|x - Q\|$ . ■

Así, si consideramos un punto  $U$  en  $C_P$ , podemos preguntarnos qué puntos de la mediatriz lo tienen como punto base respecto a  $P$ . Por supuesto, serán puntos del rayo  $\overline{PU}$  y, por el lema anterior, cumplirán que su correspondiente punto base respecto a  $Q$ , además de estar en  $C_Q$ , debe pertenecer a la recta que pasa por  $U$  y es paralela a la que pasa por  $P$  y por  $Q$ .

En general, esta intersección sólo puede ser vacía, o ser únicamente uno o dos puntos, o ser un segmento o una semirrecta (ver figura 4.2 con ejemplos de cada uno de los casos).

Sin embargo, podemos ser más específicos cuando se verifica que  $w_P > w_Q$ , como se pone de manifiesto en el siguiente lema:

**Lema 4.3.3.** *Si  $w_P > w_Q$ , entonces cualquier rayo que parta de  $P$  corta a la mediatriz en un único punto. Además,  $M(P, Q) \subset B\left(P, \frac{w_Q \cdot \|P - Q\|}{w_P - w_Q}\right)$ .*

*Demostración:*

Sea  $x$  un punto cualquiera de  $\mathbb{R}^2$  y consideremos la siguiente función

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= w_Q \cdot \|(P + \lambda \cdot (x - P)) - Q\| - w_P \cdot \|(P + \lambda \cdot (x - P)) - P\| = \\ &= w_Q \cdot \|(P + \lambda \cdot (x - P)) - Q\| - \lambda \cdot w_P \cdot \|x - P\| \end{aligned}$$

$g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ .

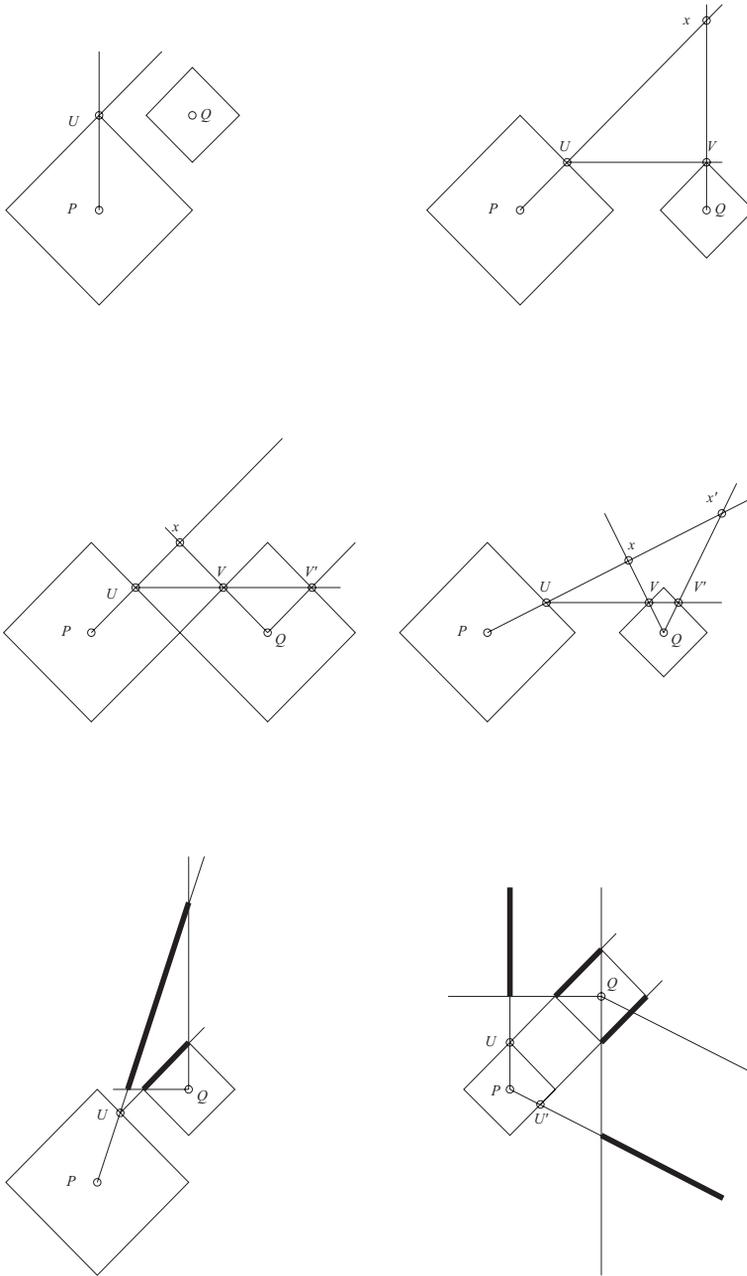


Figura 4.2.

El punto  $P + \lambda \cdot (x - P)$  estará en  $M(P, Q)$  si y sólo si  $g(\lambda) = 0$ .

$$\begin{aligned}
 & g(\mu \cdot \lambda_1 + (1 - \mu) \cdot \lambda_2) = \\
 & = w_Q \cdot \|(P + (\mu \cdot \lambda_1 + (1 - \mu) \cdot \lambda_2) \cdot (x - P)) - Q\| - (\mu \cdot \lambda_1 + (1 - \mu) \cdot \lambda_2) \cdot w_P \cdot \|x - P\| = \\
 & = w_Q \cdot \|P - Q + (\mu \cdot \lambda_1 + (1 - \mu) \cdot \lambda_2) \cdot (x - P)\| - (\mu \cdot \lambda_1 + (1 - \mu) \cdot \lambda_2) \cdot w_P \cdot \|x - P\| = \\
 & = w_Q \cdot \|\mu \cdot (P - Q + \lambda_1 \cdot (x - P)) + (1 - \mu) \cdot (P - Q + \lambda_2 \cdot (x - P))\| \\
 & \quad - \mu \cdot \lambda_1 \cdot w_P \cdot \|x - P\| - (1 - \mu) \cdot \lambda_2 \cdot w_P \cdot \|x - P\| \leq \\
 & \leq w_Q \cdot \|\mu \cdot (P - Q + \lambda_1 \cdot (x - P))\| + w_Q \cdot \|(1 - \mu) \cdot (P - Q + \lambda_2 \cdot (x - P))\| \\
 & \quad - \mu \cdot \lambda_1 \cdot w_P \cdot \|x - P\| - (1 - \mu) \cdot \lambda_2 \cdot w_P \cdot \|x - P\| = \\
 & = \mu \cdot g(\lambda_1) + (1 - \mu) \cdot g(\lambda_2)
 \end{aligned}$$

Esa función es convexa, ya que, para todo  $\mu \in [0, 1]$  y para todo  $\lambda_1, \lambda_2$  positivos se cumple que

$$\begin{aligned}
 g(\lambda) & = w_Q \cdot \|(P + \lambda \cdot (x - P)) - Q\| - \lambda \cdot w_P \cdot \|x - P\| \leq \\
 & \leq w_Q \cdot \|P - Q\| + w_Q \cdot \lambda \cdot \|x - P\| - \lambda \cdot w_P \cdot \|x - P\| = \\
 & = w_Q \cdot \|P - Q\| + (w_Q - w_P) \cdot \lambda \cdot \|x - P\|
 \end{aligned}$$

Además, por una parte se cumple que  $g(0) = w_Q \cdot \|P - Q\|$  es positivo, y por otra parte, en virtud de la propiedad triangular de la norma, se cumple que

lo que implica que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} g(\lambda) = -\infty$  puesto que  $w_Q - w_P < 0$

Como una función convexa  $g(\lambda)$  que tienda a  $-\infty$  cuando  $\lambda$  tiende a  $\infty$  tiene que ser estrictamente decreciente, podemos garantizar la veracidad de la primera parte del resultado propuesto.

$$w_Q \cdot \|P - Q\| + (w_Q - w_P) \cdot \lambda \cdot \|x - P\| = 0$$

Además, de la desigualdad anterior obtenida como consecuencia de la propiedad triangular de la norma y, puesto que la única solución de

se alcanza para  $\lambda = \frac{w_Q \cdot \|P - Q\|}{(w_P - w_Q) \cdot \|x - P\|}$ , podemos deducir que si  $g(\lambda) = 0$  se cumple que  $\lambda \in \left( 0, \frac{w_Q \cdot \|P - Q\|}{(w_P - w_Q) \cdot \|x - P\|} \right]$ . Así, el punto de la mediatriz que pertenece al rayo  $\overline{Px}$ , y por tanto es de la forma  $P + \lambda(x - P)$ , verifica que

$$\|P + \lambda(x - P) - P\| = \lambda \cdot \|x - P\| \leq \frac{w_Q \cdot \|P - Q\|}{w_P - w_Q}$$

con lo que queda probada su pertenencia a la citada bola.

Además, el siguiente lema prueba que la mediatriz es un conjunto acotado sólo cuando los pesos asociados son distintos:

**Lema 4.3.4.** *Sea  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $P$  y  $Q$  dos puntos distintos de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces, el conjunto*

$$M(P, Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } \|x - P\| = \|x - Q\| \right\}$$

es un conjunto no acotado.

*Demostración:*

Probaremos el citado resultado comprobando que, para todo  $k \geq \frac{\|P - Q\|}{2}$ , y siendo

$$C(P, k) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } \|x - P\| = k \right\}$$

$$C(Q, k) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } \|x - Q\| = k \right\}$$

se cumple que  $C(P, k) \cap C(Q, k) \neq \emptyset$ .

Para  $k = \frac{\|P - Q\|}{2}$  se cumple, puesto que  $x = \frac{P + Q}{2} \in C(P, k) \cap C(Q, k)$

Por tanto, tomemos  $k > \frac{\|P - Q\|}{2}$  y consideremos los puntos

$$x_1 = \left( 1 - \frac{k}{\|P - Q\|} \right) \cdot P + \frac{k}{\|P - Q\|} \cdot Q$$

$$x_2 = \left( 1 + \frac{k}{\|P - Q\|} \right) \cdot P - \frac{k}{\|P - Q\|} \cdot Q$$

-  $\|x_1 - P\| = \frac{k}{\|P - Q\|} \cdot \|P - Q\| = k$

-  $\|x_1 - Q\| < k$  puesto que

- si  $k \leq \|P - Q\|$  se cumple que

$$\|x_1 - Q\| = \left(1 - \frac{k}{\|P - Q\|}\right) \cdot \|P - Q\| = \|P - Q\| - k < k$$

puesto que estamos suponiendo que  $k > \frac{\|P - Q\|}{2}$

- si  $k > \|P - Q\|$  se cumple que

$$\|x_1 - Q\| = \left(\frac{k}{\|P - Q\|} - 1\right) \cdot \|P - Q\| = k - \|P - Q\| < k$$

$$\cdot \|x_2 - P\| = k$$

$$\cdot \|x_2 - Q\| = \left(1 + \frac{k}{\|P - Q\|}\right) \cdot \|P - Q\| = \|P - Q\| + k > k$$

Así, la función  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $g(x) = \|x - P\| - \|x - Q\|$  es una función continua, puesto que las normas lo son y además se verifica que  $g(x_1) > 0$  y que  $g(x_2) > 0$

Observando que  $\gamma(\theta) = \left(\frac{\cos\theta}{\|( \cos\theta, \text{sen}\theta )\|}, \frac{\text{sen}\theta}{\|( \cos\theta, \text{sen}\theta )\|}\right)$  es una parametrización de la circunferencia unidad correspondiente a una norma cualquiera, podemos construir una parametrización  $\gamma^*$  de la circunferencia de centro  $P$  y radio  $k$  como sigue:

$$\gamma^*(\theta) = P + k \cdot \left(\frac{\cos(\theta + \theta_0)}{\|( \cos(\theta + \theta_0), \text{sen}(\theta + \theta_0) )\|}, \frac{\text{sen}(\theta + \theta_0)}{\|( \cos(\theta + \theta_0), \text{sen}(\theta + \theta_0) )\|}\right)$$

siendo  $\theta_0 = \text{arctg} \frac{x_{12} - P_2}{x_{11} - P_1}$ , con lo que  $\cos\theta_0 = \frac{x_{11} - P_1}{\|x_1 - P\|_2}$  y  $\text{sen}\theta_0 = \frac{x_{12} - P_2}{\|x_1 - P\|_2}$

habiendo denotado al punto  $P = (P_1, P_2)$ , al punto  $x = (x_{11}, x_{12})$  y por  $\|\cdot\|_2$  a la norma euclídea.

Teniendo en cuenta que

$$\gamma^*(0) = P + k \cdot \left(\frac{\cos(\theta_0)}{\|( \cos(\theta_0), \text{sen}(\theta_0) )\|}, \frac{\text{sen}(\theta_0)}{\|( \cos(\theta_0), \text{sen}(\theta_0) )\|}\right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= P + k \cdot \left( \frac{\frac{x_{11} - P_1}{\|x_1 - P\|_2}, \frac{x_{12} - P_2}{\|x_1 - P\|_2}}{\frac{\|x_1 - P\|}{\|x_1 - P\|_2}, \frac{\|x_1 - P\|}{\|x_1 - P\|_2}} \right) = P + \frac{k}{\|x_1 - P\|} \cdot (x_1 - P) = x_1 \\
 \gamma^*(\pi) &= P + k \cdot \left( \frac{-\cos(\theta_0)}{\|( \cos(\theta_0), \sen(\theta_0) )\|}, \frac{-\sen(\theta_0)}{\|( \cos(\theta_0), \sen(\theta_0) )\|} \right) = \\
 &= P - k \cdot \left( \frac{\frac{x_{11} - P_1}{\|x_1 - P\|_2}, \frac{x_{12} - P_2}{\|x_1 - P\|_2}}{\frac{\|x_1 - P\|}{\|x_1 - P\|_2}, \frac{\|x_1 - P\|}{\|x_1 - P\|_2}} \right) = P - \frac{k}{\|x_1 - P\|} \cdot (x_1 - P) = 2 \cdot P - x_1 = \\
 &= 2 \cdot P - \left[ \left( 1 - \frac{k}{\|P - Q\|} \right) \cdot P + \frac{k}{\|P - Q\|} \cdot Q \right] = \\
 &= \left( 1 + \frac{k}{\|P - Q\|} \right) \cdot P - \frac{k}{\|P - Q\|} \cdot Q = x_2
 \end{aligned}$$

podemos afirmar que la función  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$h(\theta) = g(\gamma^*(\theta)) = k - \|\gamma^*(\theta) - Q\|$$

es una función continua, tal que

$$h(0) = k - \|\gamma^*(0) - Q\| = k - \|x_1 - Q\| > 0$$

$$h(\pi) = k - \|\gamma^*(\pi) - Q\| = k - \|x_2 - Q\| < 0$$

Como también se cumple que, para todo  $\theta \in \mathbb{R}$  se verifica que  $\gamma^*(\theta) \in C(P, k)$ , podemos garantizar la existencia de algún valor  $\theta^* \in (0, \pi)$  de tal forma que  $\gamma^*(\theta^*) \in C(P, k) \cap C(Q, k)$ , lo que prueba el enunciado propuesto. ■

En principio, dados dos puntos de cualquier espacio normado definido sobre  $\mathbb{R}^2$ , y cada uno de ellos asociado a un escalar positivo, podríamos encontrarnos con puntos de la mediatriz ponderada correspondiente en todo el plano. Nuestro siguiente objetivo se centra en eliminar aquellas regiones en las que podamos asegurar que no hay puntos de la correspondiente mediatriz. Para ello, llamaremos:

- cara posterior de  $P$ , al conjunto

$$CP_p = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \text{ para los que existe un } \lambda_0 > 0 \right. \\ \left. \text{tal que } \|x_p + \lambda_0 \cdot (Q - P) - P\| = \frac{1}{w_p} \right\}$$

- cara anterior de  $P$ , al conjunto  $CA_p = (CP_p)^c$

- cara posterior de  $Q$ , al conjunto

$$CP_q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \text{ para los que existe un } \mu_0 > 0 \right. \\ \left. \text{tal que } \|x_q + \mu_0 \cdot (P - Q) - Q\| = \frac{1}{w_q} \right\}$$

- cara anterior de  $Q$ , al conjunto  $CA_q = (CP_q)^c$

El siguiente resultado nos permite discriminar algunas regiones del plano en la búsqueda de puntos de una mediatriz dada:

**Teorema 4.3.1.**  $CP_p \cap M(P, Q) \neq \emptyset \Leftrightarrow w_p > w_q$

*Demostración:*

$$(\Leftarrow) \quad \text{Sea } x^* = \frac{w_p}{w_p - w_q} \cdot P - \frac{w_q}{w_p - w_q} \cdot Q$$

Este elemento está en  $M(P, Q)$  puesto que

$$\|x^* - P\| = \left\| \frac{w_q}{w_p - w_q} \cdot (P - Q) \right\| = \frac{w_q}{w_p - w_q} \cdot \|P - Q\|$$

$$\|x^* - Q\| = \left\| \frac{w_p}{w_p - w_q} \cdot (P - Q) \right\| = \frac{w_p}{w_p - w_q} \cdot \|P - Q\|$$

Además,  $x^* \in CP_p$  puesto que

$$x_p^* = \frac{1}{w_p \cdot \|x^* - P\|} \cdot x^* + \left( 1 - \frac{1}{w_p \cdot \|x^* - P\|} \right) \cdot P =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{w_P - w_Q}{w_P \cdot w_Q \cdot \|P - Q\|} \cdot x^* + \left( 1 - \frac{w_P - w_Q}{w_P \cdot w_Q \cdot \|P - Q\|} \right) \cdot P = \\
 &= \frac{1}{w_Q \cdot \|P - Q\|} \cdot P - \frac{1}{w_P \cdot \|P - Q\|} \cdot Q + P - \frac{w_P - w_Q}{w_P \cdot w_Q \cdot \|P - Q\|} \cdot P = \\
 &= \frac{1}{w_P \cdot \|P - Q\|} \cdot (P - Q) + P
 \end{aligned}$$

y el siguiente conjunto tiene un único elemento

$$\left\{ \lambda > 0; \left\| \frac{1}{w_P \cdot \|P - Q\|} \cdot (P - Q) + P + \lambda \cdot (Q - P) - P \right\| = \frac{1}{w_P} \right\}$$

puesto que

$$\begin{aligned}
 &\left\| \frac{1}{w_P \cdot \|P - Q\|} \cdot (P - Q) + P + \lambda \cdot (Q - P) - P \right\| = \\
 &= \left| \frac{1}{w_P \cdot \|P - Q\|} - \lambda \right| \cdot \|P - Q\|
 \end{aligned}$$

y los únicos valores de  $\lambda$  para los que la expresión ante-

rior coincida con  $\frac{1}{w_P}$  son  $\lambda = 0$  y  $\lambda = \frac{2}{w_P \cdot \|P - Q\|}$ .

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que existe un elemento  $x \in CP_P \cap M(P, Q)$ . Entonces se cumplirá que:

$$- w_P \cdot \|x - P\| = w_Q \cdot \|x - Q\|$$

$$- \text{ existe un único } \lambda_0 > 0 \text{ tal que } \|x_P + \lambda_0 \cdot (Q - P) - P\| = \frac{1}{w_P}$$

Consideremos la recta  $R = \{x_P + \lambda \cdot (Q - P) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}\}$  y nótese que

$$R \cap C\left(P, \frac{1}{w_P}\right) = \{x_P, x_P + \lambda_0 \cdot (Q - P)\}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{El elemento } z = x_p + \frac{-1}{w_p \cdot \|x - P\|} \cdot (Q - P) \in R \text{ cumple que} \\
 &\|z - P\| = \left\| x_p - P + \frac{-1}{w_p \cdot \|x - P\|} \cdot (Q - P) \right\| = \\
 &= \left\| \frac{1}{w_p \cdot \|x - P\|} \cdot (x - P) + \frac{-1}{w_p \cdot \|x - P\|} \cdot (Q - P) \right\| = \\
 &= \frac{1}{w_p \cdot \|x - P\|} \cdot \|x - Q\| = \frac{1}{w_Q}
 \end{aligned}$$

lo que implica que  $w_p > w_Q$  puesto que se cumple que  $\|z - P\| > \frac{1}{w_p}$  ya que  $C\left(P, \frac{1}{w_p}\right)$  se corta con  $R$  en dos únicos puntos. ■

**Corolario 4.3.1.** Como consecuencia de este teorema, podemos afirmar que

- $M(P, Q) \subset CA_p \cap CA_Q \Leftrightarrow w_p = w_Q$
- $M(P, Q) \cap (CP_p \cap CP_Q) = \emptyset$
- $CP_p \subset CA_Q$  y  $CP_Q \subset CA_p$

Por último, pondremos de manifiesto que, en el caso en el que los escalares positivos  $w_p > w_Q$  sean distintos, la mediatriz es homeomorfa a una circunferencia alrededor del punto cuyo peso sea mayor.

**Teorema 4.3.2.** Si  $w_p > w_Q$ , entonces  $M(P, Q)$  y  $C_p$  son homeomorfos.

*Demostración:*

En estas condiciones, la aplicación continua

$$\begin{aligned}
 g: M(P, Q) &\longrightarrow C_p \\
 x &\mapsto g(x) = \frac{1}{w_p \cdot \|x - P\|} \cdot x + \left(1 - \frac{1}{w_p \cdot \|x - P\|}\right) \cdot P
 \end{aligned}$$

es inyectiva ya que, como  $x$  pertenece al rayo  $\overline{Pg(x)}$  y  $y$  pertenece al rayo  $\overline{Pg(y)}$ , si  $g(x) = g(y)$ , entonces  $x$  y  $y$  están en el mismo rayo lo que, en virtud de la unicidad probada en el lema 4.3.3, nos permite asegurar que  $x = y$ .

De la misma forma,  $g$  también es sobreyectiva ya que, si elegimos un elemento  $z \in C_p$ , el lema 4.3.3 también nos permite garantizar la existencia de un punto  $z^* \in M(P, Q)$  (que además es único) tal que  $g(z^*) = z$ .

Así, puesto que  $M(P, Q)$  es un compacto ya que es un cerrado y acotado de  $\mathbb{R}^2$ , podemos asegurar la veracidad del enunciado propuesto. ■

Nótese que dados dos puntos distintos  $P$  y  $Q$  de  $\mathbb{R}^2$  a los que están asociados respectivamente dos escalares positivos distintos  $w_p$  y  $w_Q$  cumpliendo que  $w_p > w_Q$  y siendo  $\|\cdot\|$  una norma cualquiera en  $\mathbb{R}^2$ , aunque es cierto que el conjunto

$$N(P, Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } w_p \cdot \|x - P\| \leq w_Q \cdot \|x - Q\| \right\}$$

es homeomorfo a un círculo, no es cierto, en general, que dicho conjunto sea convexo, como se pone de manifiesto con el siguiente ejemplo:

### EJEMPLO 8

Considerando la  $\|\cdot\|_1$  en  $\mathbb{R}^2$ , y los puntos  $P = (0, 0)$ ,  $Q = (1, 2)$ , asociados a los valores  $w_p = 5$  y  $w_Q = 3$ , respectivamente, se tiene que el punto  $x = (0, 1)$

$$w_p \cdot \|x - P\| = 5 \cdot 1 = 5 \leq 6 = 3 \cdot 2 = w_Q \cdot \|x - Q\|,$$

cumple que

el punto  $y = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$  cumple que

$$w_p \cdot \|y - P\| = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2} \leq \frac{15}{2} = 3 \cdot \frac{5}{2} = w_Q \cdot \|y - Q\|,$$

pero el punto  $z = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y$  cumple que

$$w_p \cdot \|z - P\| = 5 \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{4} > \frac{21}{4} = 3 \cdot \frac{7}{4} = w_Q \cdot \|z - Q\|$$

Podríamos afirmar que dicho conjunto es convexo si exigimos que la norma provenga de un producto escalar; es decir, que verifique que, para todo par de vectores  $u$  y  $v$ , se cumpla que

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2 \cdot (\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

puesto que, en tal caso, si  $x$  e  $y$  son dos puntos distintos de  $N(P, Q)$ , tomando como  $u_1 = P - x$  y como  $v_1 = y - x$ , se cumple que

$$\|u_1 + v_1\|^2 + \|y - P\|^2 = 2 \cdot (\|x - P\|^2 + \|y - x\|^2)$$

Si la norma proviene de un producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , también se cumple que

$$\begin{aligned} \|u_1 + v_1\|^2 &= \langle u_1 + v_1, u_1 + v_1 \rangle = \|u_1\|^2 + \|v_1\|^2 + 2 \cdot \langle u_1, v_1 \rangle = \\ &= \|x - P\|^2 + \|y - x\|^2 + 2 \cdot \langle u_1, v_1 \rangle \end{aligned}$$

con lo que podemos afirmar que

$$2 \cdot \langle u_1, v_1 \rangle = \|x - P\|^2 + \|y - x\|^2 - \|y - P\|^2$$

Por otra parte, siendo  $\alpha \in [0, 1]$ , considerando  $z = (1 - \alpha) \cdot x + \alpha \cdot y$  y tomando como  $u_2 = P - x$  y como  $v_2 = y - x$ , se cumple que

$$\|u_2 + v_2\|^2 + \|z - P\|^2 = 2 \cdot (\|x - P\|^2 + \alpha^2 \cdot \|y - x\|^2)$$

y también se cumple que

$$\begin{aligned} \|u_2 + v_2\|^2 &= \langle u_2 + v_2, u_2 + v_2 \rangle = \|u_2\|^2 + \|v_2\|^2 + 2 \cdot \langle u_2, v_2 \rangle = \\ &= \|x - P\|^2 + \|z - x\|^2 + 2 \cdot \langle u_2, v_2 \rangle = \|x - P\|^2 + \|z - x\|^2 + 2\alpha \cdot \langle u_2, v_2 \rangle \end{aligned}$$

con lo que podemos afirmar que

$$2\alpha \cdot \langle u_2, v_2 \rangle = \|x - P\|^2 + \alpha^2 \cdot \|y - x\|^2 - \|z - P\|^2$$

Finalmente, utilizando lo anterior, podemos sustituir  $\langle u_2, v_2 \rangle$  obteniendo que

$$\|z - P\|^2 = (1 - \alpha) \cdot \|x - P\|^2 - \alpha(1 - \alpha) \cdot \|y - x\|^2 + \alpha \cdot \|y - P\|^2$$

Así, teniendo en cuenta que  $w_p > w_q > 0$ , y que tanto  $x$  como  $y$  están en  $N(P, Q)$ , podemos afirmar la veracidad de la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned}
 & w_p^2 \cdot \|((1-\alpha) \cdot x + \alpha \cdot y) - P\|^2 = \\
 & = (1-\alpha) \cdot w_p^2 \cdot \|x - P\|^2 - \alpha(1-\alpha) \cdot w_p^2 \cdot \|y - x\|^2 + \alpha \cdot w_p^2 \cdot \|y - P\|^2 \leq \\
 & \leq (1-\alpha) \cdot w_Q^2 \cdot \|x - Q\|^2 - \alpha(1-\alpha) \cdot w_Q^2 \cdot \|y - x\|^2 + \alpha \cdot w_Q^2 \cdot \|y - Q\|^2 = \\
 & = w_Q^2 \cdot \|((1-\alpha) \cdot x + \alpha \cdot y) - Q\|^2
 \end{aligned}$$

con lo que  $z \in N(P, Q)$ , probando así la convexidad del citado conjunto.



## **CAPÍTULO V:**

### **PARTICULARIZACIÓN PARA NORMAS ESTRICTAMENTE CONVEXAS**



## Particularización para normas estrictamente convexas

A la vista de los resultados presentados en el capítulo anterior, si la región  $S$  es una poligonal, siempre podemos encontrar alguna solución óptima para una amplia familia de problemas de localización de un centro no deseado dentro del conjunto  $V \cup I \cup E$ . Sin embargo, puede haber algunos problemas de localización, que se pueden plantear en términos de nuestro modelo, para los que, además de las soluciones dentro de nuestro conjunto, haya otras fuera de él, como se puede observar en el siguiente ejemplo:

### EJEMPLO 9

Consideremos la norma  $\|\cdot\|_1$ , que el conjunto  $S$  sea la poligonal convexa determinada por los puntos  $(-12, 0)$ ,  $(0, -12)$ ,  $(12, 0)$  y  $(0, 12)$  y las coordenadas de las poblaciones  $a_1 = (-4, 0)$ ,  $a_2 = (2, 6)$ ,  $a_3 = (6, -2)$  y  $a_4 = (0, -12)$ , todas ellas con el mismo peso. El máximo valor que puede tomar la función

$$g(x) = \min \left\{ \|x - a_1\|, \|x - a_2\|, \|x - a_3\|, \|x - a_4\| \right\}$$

es 8 puesto que  $S \subset \bigcup_{i=1}^4 B(a_i, 8)$  y además, el punto  $P = (10, 2)$  cumple que  $g(P) = 8$  puesto que

$$\begin{aligned} \|P - a_1\| &= 18 & \|P - a_2\| &= 12 \\ \|P - a_3\| &= 8 & \|P - a_4\| &= 24 \end{aligned}$$

Por tanto, como las soluciones óptimas del problema "maximin" son todos los puntos del conjunto (ver figura en el ejemplo 17 dentro de la sección 6.2)

$$[(0, 12), (-12, 0)] \cup [(-12, 0), (-4, -8)] \cup [(-4, -8), (0, -4)] \cup$$

$$\cup[(0, -4), (4, -8)] \cup [(8, 4), (12, 0)]$$

podemos afirmar que el conjunto  $V \cup I \cup E$  no contiene a todas las soluciones de este problema, ya que, por ejemplo, el punto  $P = (10, 2)$ , que no es ningún vértice de  $S$ , es solución óptima del problema "maximin" y, aunque está en la  $Fr(S)$ , no pertenece a ninguna mediatriz. Sin embargo, siempre podemos encontrar en  $V \cup I \cup E$  (o incluso en  $V \cup I \cup (E \cap X)$ ) algún punto que también es solución para este problema, como por ejemplo, el punto  $(12, 0)$ .

Para poder afirmar que, cuando la región  $S$  es una poligonal, el conjunto  $V \cup I \cup E$  contiene a todas las soluciones de nuestro problema de localización, presentaremos, en las páginas siguientes, un razonamiento que, aunque no es aplicable a cualquier norma, sí lo podemos utilizar en una amplia familia de ellas, dentro de las cuales están las empleadas en las aplicaciones más comunes.

### 5.1. Normas estrictamente convexas

El razonamiento que utilizaremos se basa en una caracterización de la propiedad geométrica de estar tres puntos alineados, a través de una igualdad aritmética formulada en términos de la norma. Observemos, en primer lugar que si tres puntos  $P_1, P_2$  y  $P_3$  están alineados, entonces se cumple que

$$\| P_{\tau(1)} - P_{\tau(2)} \| + \| P_{\tau(2)} - P_{\tau(3)} \| = \| P_{\tau(1)} - P_{\tau(3)} \|$$

siendo  $\tau$  la permutación en el conjunto  $\{1, 2, 3\}$  tal que

$$\| P_{\tau(1)} - P_{\tau(2)} \| \leq \| P_{\tau(2)} - P_{\tau(3)} \| \leq \| P_{\tau(1)} - P_{\tau(3)} \|$$

puesto que si los puntos están alineados, sabemos que existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $P_3 = P_1 + \lambda \cdot (P_2 - P_1)$ , y por tanto se tiene que

$$\| P_3 - P_2 \| = |1 - \lambda| \cdot \| P_1 - P_2 \| \quad \text{y} \quad \| P_3 - P_1 \| = |\lambda| \cdot \| P_1 - P_2 \|$$

y como, por otra parte, se cumple que

$$\max\{1, |\lambda|, |1 - \lambda|\} = \begin{cases} 1 - \lambda & \text{si } \lambda \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq \lambda \leq 1 \\ \lambda & \text{si } \lambda \geq 1 \end{cases}$$

es evidente que, en cualquiera de estos tres casos, se cumple la igualdad enunciada, ya que

- si  $\lambda \leq 0$ , entonces  $1 - \lambda = 1 + |\lambda|$

- si  $0 \leq \lambda \leq 1$ , entonces  $1 = |\lambda| + |1 - \lambda|$

- si  $\lambda \geq 1$ , entonces  $\lambda = 1 + |1 - \lambda|$

Sin embargo, en general, si se cumple esa igualdad en términos de la norma no es posible garantizar que los tres puntos estén alineados, ya que si utilizamos la norma  $\|\cdot\|_1$  y tomamos los puntos  $P_1 = (0, 0)$ ,  $P_2 = (1, 0)$  y  $P_3 = (0, 1)$ , se cumple que

$$2 = \|P_1 - P_3\| = \|P_1 - P_2\| + \|P_2 - P_3\| = 1 + 1$$

y los tres puntos no están alineados.

A la vista de este comentario, se nos plantea el siguiente interrogante: ¿en qué casos (y sólo en ellos) es posible utilizar la igualdad anterior para caracterizar que tres puntos estén alineados?

Para poder encontrar una respuesta, observemos el siguiente resultado:

**Teorema 5.1.1.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El conjunto  $C(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } \|x\| = 1\}$  no contiene segmentos (no degenerados).*
2. *Los conjuntos  $C(P, k) = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } \|x - P\| = k\}$  no contienen segmentos (no degenerados) para todo  $P \in \mathbb{R}^2$  y para todo  $k > 0$*
3. *Si una terna  $P_1, P_2$  y  $P_3$  de puntos de  $\mathbb{R}^2$  cumplen que*

$$\|P_{\tau(1)} - P_{\tau(2)}\| + \|P_{\tau(2)} - P_{\tau(3)}\| = \|P_{\tau(1)} - P_{\tau(3)}\|$$

*siendo  $\tau$  la permutación en el conjunto  $\{1, 2, 3\}$  tal que*

$$\|P_{\tau(1)} - P_{\tau(2)}\| \leq \|P_{\tau(2)} - P_{\tau(3)}\| \leq \|P_{\tau(1)} - P_{\tau(3)}\|$$

*entonces, podemos deducir que los puntos  $P_1, P_2$  y  $P_3$  están alineados.*

*Demostración:*

- (1.  $\Rightarrow$  2.)

Supongamos que existen tres puntos alineados  $P_1, P_2$  y  $P_3$  tales que  $\|P_1 - P\| = \|P_2 - P\| = \|P_3 - P\| = k$ . Puesto que, en tal caso, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $P_3 = P_1 + \lambda \cdot (P_2 - P_1)$ , estaríamos contradiciendo

nuestra hipótesis de partida, ya que los puntos

$$Q_1 = \frac{1}{k}(P_1 - P) \quad , \quad Q_2 = \frac{1}{k}(P_2 - P) \quad , \quad Q_3 = \frac{1}{k}(P_3 - P)$$

estarían en  $C(0, 1)$  y alineados pues

$$\begin{aligned} Q_3 &= \frac{1}{k} \cdot (P_3 - P) = \frac{1}{k} \cdot (P_1 + \lambda \cdot (P_2 - P_1) - P) = \\ &= \frac{1}{k} \cdot (P_1 - P + \lambda \cdot ((P_2 - P) - (P_1 - P))) = \\ &= \frac{1}{k} \cdot (P_1 - P) + \lambda \cdot \left( \frac{1}{k} \cdot (P_2 - P) - \frac{1}{k} \cdot (P_1 - P) \right) = Q_1 + \lambda \cdot (Q_2 - Q_1) \end{aligned}$$

- (2.  $\Rightarrow$  1.)

Basta tomar  $P = (0, 0)$  y  $k = 1$ .

- (2.  $\Rightarrow$  3.)

Sean  $P_1, P_2$  y  $P_3$  tres puntos no alineados tales que

$$\|P_1 - P_3\| = \|P_1 - P_2\| + \|P_2 - P_3\|$$

$$\text{y sea } Q = \frac{\|P_2 - P_3\|}{\|P_1 - P_3\|} \cdot P_1 + \frac{\|P_1 - P_2\|}{\|P_1 - P_3\|} \cdot P_3$$

Entonces se cumple que  $\|Q - P_1\| = \|P_1 - P_2\|$ ,  $\|Q - P_3\| = \|P_2 - P_3\|$  y ese punto  $Q$  está en el segmento  $\overline{P_1 P_3}$  puesto que  $\|P_2 - P_3\| \leq \|P_1 - P_3\|$ ,  $\|P_1 - P_2\| \leq \|P_1 - P_3\|$  y

$$\frac{\|P_2 - P_3\| + \|P_1 - P_2\|}{\|P_1 - P_3\|} = 1$$

Además, para todo  $\lambda \in [0, 1]$ , el punto  $R = \lambda \cdot Q + (1 - \lambda) \cdot P_2$  cumple que:

-  $\|Q - P_1\| + \|Q - P_3\| \leq \|R - P_1\| + \|R - P_3\|$ , en virtud de la proposición 3.3.1, puesto que

$$R = \lambda \cdot \frac{\|P_2 - P_3\|}{\|P_1 - P_3\|} \cdot P_1 + \lambda \cdot \frac{\|P_1 - P_2\|}{\|P_1 - P_3\|} \cdot P_3 + (1 - \lambda) \cdot P_2$$

$$\lambda \cdot \frac{\|P_2 - P_3\|}{\|P_1 - P_3\|} + \lambda \cdot \frac{\|P_1 - P_2\|}{\|P_1 - P_3\|} + (1-\lambda) = 1$$

-  $\|Q - P_1\| + \|Q - P_3\| \leq \|R - P_1\| + \|R - P_3\|$ , de nuevo en virtud de la proposición 3.3.1

Por tanto, observando estas dos desigualdades, podemos afirmar que

$$\|R - P_1\| + \|R - P_3\| = \|P_1 - P_3\|$$

Por otro lado, se tiene que

$$\|R - P_1\| \leq \lambda \cdot \|Q - P_1\| + (1-\lambda) \cdot \|P_1 - P_2\| = \|P_1 - P_2\|$$

$$\|R - P_3\| \leq \lambda \cdot \|Q - P_3\| + (1-\lambda) \cdot \|P_2 - P_3\| = \|P_2 - P_3\|$$

Sin embargo, si alguna de las desigualdades fuese estricta, sumando ambas obtendríamos que

$$\|R - P_1\| + \|R - P_3\| < \|P_1 - P_2\| + \|P_2 - P_3\| = \|P_1 - P_3\|$$

en contradicción con lo anteriormente probado.

Así,  $\|R - P_1\| = \|P_1 - P_2\|$  y  $\|R - P_3\| = \|P_2 - P_3\|$ , con lo que tanto  $C(P_1, \|P_1 - P_2\|)$  como  $C(P_3, \|P_2 - P_3\|)$  contendrían a todo el segmento  $\overline{P_2Q}$ , que, de nuevo, nos conduce a una contradicción.

- (3.  $\Rightarrow$  2.)

Supongamos que existe  $P \in \mathbb{R}^2$  y existe  $k > 0$  tales que  $C = (P, k)$  contiene algún segmento no degenerado y llamaremos  $Q$  y  $Q'$  a sus vértices.

En particular, se tiene que  $\|P - Q\| = \|P - Q'\| = k$ . Entonces, los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $Q'$  no están alineados, ya que:

- si existiera  $\alpha \in [0, 1]$  tal que  $P = \alpha \cdot Q + (1-\alpha) \cdot Q'$ , se tendría que  $P \in \overline{QQ'} \subset C(P, k)$ , con lo que  $0 = \|P - P\| = k$ , lo que está en contradicción con nuestras hipótesis.

- si existiera  $\beta \in [0, 1]$  tal que  $Q = \beta \cdot P + (1-\beta) \cdot Q'$ , se tendría que  $\|P - Q\| = (1-\beta) \cdot \|P - Q'\|$ . Como, por otra parte, se cumple que  $\|P - Q'\| = \|P - Q'\|$ , entonces  $\beta = 0$  y, por tanto,  $Q = Q'$  lo que está en contradicción con nuestras hipótesis.

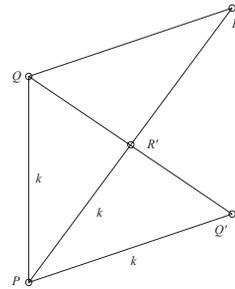
– si existiera  $\gamma \in [0,1]$  tal que  $Q' = \gamma \cdot P + (1-\gamma) \cdot Q$ , se tendría que  $\|P - Q'\| = (1-\gamma) \cdot \|P - Q\|$ . Como, por otra parte, se cumple que  $\|P - Q\| = \|P - Q'\|$ , entonces  $\gamma = 0$  y, por tanto,  $Q = Q'$  lo que está en contradicción con nuestras hipótesis.

Consideremos, entonces, el punto  $R = Q + (Q' - P)$  que cumple, que

– no está alineado con  $P$  y con  $Q$ , pues si existiera  $\lambda \in \mathbb{R}^2$  tal que  $R = P + \lambda(Q - P)$ , entonces se tendría que verificar que  $Q + (Q' - P) = P + \lambda(Q - P)$ , con lo que  $Q' = P + (\lambda - 1) \cdot (Q - P)$ , en contradicción con lo que acabamos de probar anteriormente, y

– siendo  $\|\cdot\|_2$  la norma euclídea,  $\|Q - R\|_2 = \|P - Q'\|_2$

y denotaremos por  $R' = [Q, Q'] \cap [P, R]$ ; en particular, dicho punto  $R' \in [P, R]$ , con lo que, por una parte, existe  $\mu \in (0,1)$  tal que  $R' = P + \mu \cdot (R - P)$  y, por otra, siendo  $\|\cdot\|_2$  la norma euclídea, se cumple, tanto que  $\|P - R\| = \|P - R'\| + \|R - R'\|$ , como que  $\|P - R\|_2 = \|P - R'\|_2 + \|R - R'\|_2$



Por tanto,

– se tiene que

$$\|P - R'\| = \mu \cdot \|P - R\| = \mu \cdot (\|P - R'\| + \|R - R'\|)$$

de donde obtenemos que  $(1-\mu) \cdot \|P - R'\| = \mu \cdot \|R - R'\|$  y, en consecuencia,

$$\frac{\mu}{1-\mu} = \frac{\|P - R'\|}{\|R - R'\|}$$

– y, además, se cumple que

$$\|P - R'\|_2 = \mu \cdot \|P - R\|_2 = \mu \cdot (\|P - R'\|_2 + \|R - R'\|_2)$$

obteniendo que  $(1-\mu) \cdot \|P - R'\|_2 = \mu \cdot \|R - R'\|_2$ , lo que nos conduce a que

$$\frac{\mu}{1-\mu} = \frac{\|P - R'\|_2}{\|R - R'\|_2}$$

de donde podemos concluir, utilizando el teorema de Tales, que

$$\frac{\|P - R'\|}{\|R - R'\|} = \frac{\|P - R'\|_2}{\|R - R'\|_2} = \frac{\|P - Q'\|_2}{\|Q - R\|_2} = 1$$

y, por tanto, se obtiene que  $\|R - R'\| = \|P - R'\| = k$  puesto que el punto  $R' \in [Q, Q'] \subset C(P, k)$

En conclusión, puesto que  $\|P - R\| = \|P - R'\| + \|R' - R\| = k + k = 2k$  la terna formada por los puntos no alineados  $P, Q$  y  $R$  cumple que

$$\|P - Q\| + \|Q - R\| = k + k = 2k = \|P - R\|$$

y además

$$\|P - Q\| \leq \|Q - R\| \leq \|P - R\|$$

lo que contradiría la hipótesis inicial. ■

Así, podemos establecer la siguiente definición:

**Definición 4.** Una norma sobre  $\mathbb{R}^2$  que cumpla cualquiera de las condiciones enunciadas en el teorema 5.1.1 diremos que es **estrictamente convexa**.

Para el estudio del comportamiento de la función objetivo construida a partir de cualquier norma estrictamente convexa, utilizaremos la siguiente propiedad:

**Proposición 5.1.1.** Si  $\|\cdot\|$  es una norma estrictamente convexa sobre  $\mathbb{R}^2$  y para  $x, y, P \in \mathbb{R}^2$  existe  $\alpha \in (0, 1)$  tal que

$$\|\alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y - P\| = \alpha \cdot \|x - P\| + (1 - \alpha) \cdot \|y - P\|$$

entonces  $x, y$  y  $P$  están alineados.

*Demostración:*

Puesto que si  $\|\alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y - P\| = \alpha \cdot \|x - P\| + (1 - \alpha) \cdot \|y - P\|$ , entonces se cumple que

$$\begin{aligned} \|\alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y - P\| &\geq \alpha \cdot \|x - P\| \\ \|\alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y - P\| &\geq (1 - \alpha) \cdot \|y - P\| \end{aligned}$$

y como la norma es estrictamente convexa, el teorema anterior nos permite afirmar que  $\alpha \cdot (x - P), (\alpha - 1) \cdot (y - P)$  y  $0$  están alineados, ya que

$$\begin{aligned} \alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y - P &= \alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y - \alpha \cdot P - (1 - \alpha) \cdot P = \\ &= \alpha \cdot (x - P) + (1 - \alpha) \cdot (y - P) = \alpha \cdot (x - P) - (\alpha - 1) \cdot (y - P) \end{aligned}$$

Así, podemos garantizar la existencia de  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \cdot (x - P) + \lambda \cdot (\alpha - 1)(y - P) - \alpha \cdot (x - P) \\ 0 &= \alpha(1 - \lambda) \cdot (x - P) + (\alpha - 1)\lambda \cdot (y - P) \\ 0 &= \alpha(1 - \lambda) \cdot x + (\alpha - 1)\lambda \cdot y - (\alpha - \lambda) \cdot P \end{aligned}$$

Si  $\alpha = \lambda$ , entonces  $0 = \alpha(1 - \alpha)$  y esta igualdad sólo se verifica si  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1$  o  $x = y$  y cualquiera de estas tres posibilidades está en contradicción con nuestras hipótesis. Por tanto,  $\alpha \neq \lambda$  y podemos afirmar que

$$P = \frac{\alpha(1 - \lambda)}{\alpha - \lambda} \cdot x + \frac{(\alpha - 1)\lambda}{\alpha - \lambda} \cdot y = x + \frac{(\alpha - 1)\lambda}{\alpha - \lambda} \cdot (y - x)$$

y, en consecuencia,  $x$ ,  $y$  y  $P$  están alineados. ■

## 5.2. Función objetivo para normas estrictamente convexas

Veamos ahora cómo, si restringimos el conjunto de normas utilizables a las estrictamente convexas, podemos garantizar que toda solución de cualquiera de nuestros problemas de localización, cuando nos restringimos a una región poligonal, pertenece al conjunto  $V \cup I \cup E$  descrito anteriormente. La propiedad fundamental que nos permitirá garantizar la veracidad de tal afirmación para la función objetivo construida a partir de cualquiera de estas normas, la podemos enunciar a través de la siguiente proposición:

**Proposición 5.2.1.** *Si  $\|\cdot\|$  es una norma estrictamente convexa, entonces la función objetivo  $f(x)$  es no constante en cualquier segmento de  $S$  que no esté alineado con ningún  $a_i$ .*

*Demostración:*

Sea  $[a, b]$  un segmento de  $S$  no alineado con ningún  $a_i$  y sea  $\sigma$  la permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  tal que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|a - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|a - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|a - a_{\sigma(m)}\|$$

Considerando el conjunto  $S_\sigma$  formado por los puntos de  $\mathbb{R}^2$  tales que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x - a_{\sigma(m)}\|$$

tomemos  $\lambda^* = \max\{\lambda \in (0, 1] \text{ tales que } \lambda \cdot b + (1 - \lambda) \cdot a \in S_\sigma\}$  y denotemos por  $b^* = \lambda^* \cdot b + (1 - \lambda^*) \cdot a$

En el caso en el que  $f(b^*) \neq f(a)$  habríamos terminado; por lo tanto, supongamos que  $f(b^*) = f(a)$ .

Como, por otra parte, la función objetivo no es trivial, sabemos que existe algún  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  tal que  $k_j > 0$ . Además, como  $a$ ,  $b^*$  y  $a_j$  no están alineados, para todo  $\alpha \in (0,1)$  se cumple que

$$\| \alpha \cdot a + (1 - \alpha) \cdot b^* - a_j \| < \alpha \cdot \| a - a_j \| + (1 - \alpha) \cdot \| b^* - a_j \|$$

Entonces podemos afirmar que, para todo  $\alpha \in (0,1)$

$$\begin{aligned} f(\alpha \cdot a + (1 - \alpha) \cdot b^*) &= \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\sigma(i)} \cdot \| \alpha \cdot a + (1 - \alpha) \cdot b^* - a_{\sigma(i)} \| < \\ &< \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\sigma(i)} \cdot (\alpha \cdot \| a - a_{\sigma(i)} \| + (1 - \alpha) \cdot \| b^* - a_{\sigma(i)} \|) = \\ &= \alpha \cdot \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\sigma(i)} \cdot \| a - a_{\sigma(i)} \| + (1 - \alpha) \cdot \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\sigma(i)} \cdot \| b^* - a_{\sigma(i)} \| = \\ &= \alpha \cdot f(a) + (1 - \alpha) \cdot f(b^*) = f(a) \end{aligned}$$

con lo que, para cualquier  $\alpha \in (0,1)$ , se tiene que  $f(\alpha \cdot a + (1 - \alpha) \cdot b^*) \neq f(a)$  ■

Puesto que esta propiedad es la que nos va a permitir garantizar, cuando nos restringimos a una región poligonal, la pertenencia de cualquier solución al conjunto  $V \cup I \cup E$ , presentaremos a continuación dos ejemplos que nos permitirán poner de manifiesto que, para poder asegurar que ninguna función objetivo no trivial es no constante en un segmento, es imprescindible exigir

- que la norma sea estrictamente convexa, y
- que el segmento no esté alineado con ningún  $a_i$ .

#### EJEMPLO 10

Consideremos cuatro poblaciones, con pesos asociados iguales, situadas en los puntos  $a_1 = (-1, 0)$ ,  $a_2 = (0, 1)$ ,  $a_3 = (1, 0)$  y  $a_4 = (0, -1)$

Si quisiéramos maximizar la suma de las distancias a las dos poblaciones más afectadas (es decir,  $k_1 = k_2 = 1$ ,  $k_3 = k_4 = 0$ ), entonces la función

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^4 k_i \cdot \| (x, y) - a_{\sigma(i)} \|$$

siendo  $\|\cdot\|$  la norma  $\|\cdot\|_1$  y  $\sigma$  la permutación en el conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$  tal que

$$\|x - a_{\sigma(1)}\| \leq \|x - a_{\sigma(2)}\| \leq \|x - a_{\sigma(3)}\| \leq \|x - a_{\sigma(4)}\|$$

es constante en el cuadrado de vértices  $(-1, -1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(1, 1)$  y  $(1, -1)$ .

Para justificar esta afirmación, observemos que todo elemento  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , cumple que la distancia a cada uno de los puntos  $a_i$  es

$$\begin{aligned} \|(x, y) - a_1\| &= \|(x, y) - (-1, 0)\| = |x + 1| + |y| \\ \|(x, y) - a_2\| &= \|(x, y) - (0, 1)\| = |x| + |y - 1| \\ \|(x, y) - a_3\| &= \|(x, y) - (1, 0)\| = |x - 1| + |y| \\ \|(x, y) - a_4\| &= \|(x, y) - (0, -1)\| = |x| + |y + 1| \end{aligned}$$

y consideremos la siguiente partición del conjunto  $C$ :

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\} \\ C_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } 0 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 0\} \\ C_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } -1 \leq x \leq 0; 0 \leq y \leq 1\} \\ C_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } -1 \leq x \leq 0; -1 \leq y \leq 0\} \end{aligned}$$

- Si  $(x, y) \in C_1$ , entonces

$$\begin{aligned} \|(x, y) - a_1\| &= |x + 1| + |y| = x + y + 1 \\ \|(x, y) - a_2\| &= |x| + |y - 1| = x - y + 1 \\ \|(x, y) - a_3\| &= |x - 1| + |y| = -x + y + 1 \\ \|(x, y) - a_4\| &= |x| + |y + 1| = x + y + 1 \end{aligned}$$

y, puesto que en  $C_1$  se cumple que

$$\begin{aligned} \|(x, y) - a_2\| &\leq \|(x, y) - a_1\| = \|(x, y) - a_4\| \\ \|(x, y) - a_3\| &\leq \|(x, y) - a_1\| = \|(x, y) - a_4\| \end{aligned}$$

obtenemos que  $f(x, y) = \|(x, y) - a_2\| + \|(x, y) - a_3\| = 2$

- Si  $(x, y) \in C_2$ , entonces

$$\begin{aligned}\|(x, y) - a_1\| &= |x+1| + |y| = x - y + 1 \\ \|(x, y) - a_2\| &= |x| + |y-1| = x - y + 1 \\ \|(x, y) - a_3\| &= |x-1| + |y| = -x - y + 1 \\ \|(x, y) - a_4\| &= |x| + |y+1| = x + y + 1\end{aligned}$$

y, puesto que en  $C_2$  se cumple que

$$\begin{aligned}\|(x, y) - a_3\| &\leq \|(x, y) - a_1\| = \|(x, y) - a_2\| \\ \|(x, y) - a_4\| &\leq \|(x, y) - a_1\| = \|(x, y) - a_2\|\end{aligned}$$

obtenemos que  $f(x, y) = \|(x, y) - a_3\| + \|(x, y) - a_4\| = 2$

- Si  $(x, y) \in C_3$ , entonces

$$\begin{aligned}\|(x, y) - a_1\| &= |x+1| + |y| = x + y + 1 \\ \|(x, y) - a_2\| &= |x| + |y-1| = -x - y + 1 \\ \|(x, y) - a_3\| &= |x-1| + |y| = -x + y + 1 \\ \|(x, y) - a_4\| &= |x| + |y+1| = -x + y + 1\end{aligned}$$

y, puesto que en  $C_3$  se cumple que

$$\begin{aligned}\|(x, y) - a_1\| &\leq \|(x, y) - a_3\| = \|(x, y) - a_4\| \\ \|(x, y) - a_2\| &\leq \|(x, y) - a_3\| = \|(x, y) - a_4\|\end{aligned}$$

obtenemos que  $f(x, y) = \|(x, y) - a_1\| + \|(x, y) - a_2\| = 2$

- Si  $(x, y) \in C_4$ , entonces

$$\begin{aligned}\|(x, y) - a_1\| &= |x+1| + |y| = x - y + 1 \\ \|(x, y) - a_2\| &= |x| + |y-1| = -x - y + 1 \\ \|(x, y) - a_3\| &= |x-1| + |y| = -x - y + 1 \\ \|(x, y) - a_4\| &= |x| + |y+1| = -x + y + 1\end{aligned}$$

y, puesto que en  $C_4$  se cumple que

$$\begin{aligned}\| (x, y) - a_1 \| &\leq \| (x, y) - a_2 \| = \| (x, y) - a_3 \| \\ \| (x, y) - a_4 \| &\leq \| (x, y) - a_2 \| = \| (x, y) - a_3 \|\end{aligned}$$

obtenemos que  $f(x, y) = \| (x, y) - a_1 \| + \| (x, y) - a_4 \| = 2$

con lo que, en todo segmento no alineado con todos los  $a_i$  y que esté contenido en  $C$ , esa función objetivo es constante. ■

### EJEMPLO 11

Consideremos, para la norma euclídea, tres poblaciones equiponderadas situadas en los puntos  $a_1 = \left( \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2} \right)$ ,  $a_2 = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2} \right)$  y  $a_3 = (0, 1)$  y la función objetivo asociada a las constantes  $k_1 = k_2 = 1$  y  $k_3 = 0$ ; es decir, la función

$$f(x) = \| x - a_{\sigma(1)} \| + \| x - a_{\sigma(2)} \|$$

siendo  $\sigma$  la permutación del conjunto  $\{1, 2, 3\}$  tal que

$$\| x - a_{\sigma(1)} \| \leq \| x - a_{\sigma(2)} \| \leq \| x - a_{\sigma(3)} \|\$$

Para todos los puntos  $x$  de la forma  $\left( \lambda, \frac{-1}{2} \right)$  con  $\lambda \in \left[ \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$ , que son los del segmento  $[a_1, a_2]$ , se tiene que

$$\begin{aligned}\| x - a_1 \| &= \left\| \left( \lambda, \frac{-1}{2} \right) - \left( \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2} \right) \right\| = \left\| \left( \lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \right\| = \lambda + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \| x - a_2 \| &= \left\| \left( \lambda, \frac{-1}{2} \right) - \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2} \right) \right\| = \left\| \left( \lambda - \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \right\| = \frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda \\ \| x - a_3 \| &= \left\| \left( \lambda, \frac{-1}{2} \right) - (0, 1) \right\| = \left\| \left( \lambda, \frac{-3}{2} \right) \right\| = \sqrt{\lambda^2 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{4\lambda^2 + 9}}{2}\end{aligned}$$

Puesto que  $\lambda \in \left[ \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$ , se cumple que

$$\|x - a_1\| \leq \|x - a_3\| \quad \text{y que} \quad \|x - a_2\| \leq \|x - a_3\|$$

y, por tanto, para cada punto del segmento  $[a_1, a_2]$ , el valor de la función objetivo es

$$f(x) = \lambda + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda = \sqrt{3}$$

Utilizando esta proposición y la que se obtiene como consecuencia del siguiente lema, que extiende al lema 4.3.1, podremos afirmar que cualquier solución de cualquiera de los problemas de localización de nuestro interés, cuando nos restringimos a una región poligonal, pertenece al conjunto  $V \cup I \cup E$ .

**Lema 5.2.1.** Sea  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$  un espacio normado,  $x_0$  un punto cualquiera de  $\mathbb{R}^2$  y  $R$  y  $R'$  dos rectas distintas que pasan por  $x_0$ . Entonces, para cualquier  $\delta > 0$ , existen  $x_1^* \in (R \cap B(x_0, \delta))$  y  $x_2^* \in (R' \cap B(x_0, \delta))$ , distintos de  $x_0$  y situados en cada uno de los semiplanos determinados por  $R'$ .

*Demostración:*

Al igual que en la demostración del lema 4.3.1, si consideramos  $\delta^* \in (0, \delta)$  y  $x_1 \in R$  un punto cualquiera tal que  $x_1 \neq x_0$ , podemos demostrar que tanto

$$x_1^* = x_0 + \delta^* \cdot \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|} \quad \text{como} \quad x_2^* = x_0 - \delta^* \cdot \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|} \quad \text{pertenecen a } R \cap B(x_0, \delta)$$

Por otra parte, si suponemos que la ecuación general de la recta  $R'$  es  $F(x) = a \cdot x + b = 0$ , se tiene que

$$\begin{aligned} F(x_1^*) &= a \cdot x_1^* + b = a \cdot \left( x_0 + \delta^* \cdot \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|} \right) + b = \\ &= a \cdot x_0 + b + \frac{\delta^*}{\|x_1 - x_0\|} \cdot (a \cdot x_1 - a \cdot x_0) = \frac{\delta^*}{\|x_1 - x_0\|} \cdot (a \cdot x_1 + b) \end{aligned}$$

es distinto de 0 puesto que  $x_1 \notin R'$ . Además

$$\begin{aligned} F(x_2^*) &= a \cdot x_2^* + b = a \cdot \left( x_0 - \delta^* \cdot \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|} \right) + b = \\ &= a \cdot x_0 + b - \frac{\delta^*}{\|x_1 - x_0\|} \cdot (a \cdot x_1 - a \cdot x_0) = \frac{-\delta^*}{\|x_1 - x_0\|} \cdot (a \cdot x_1 + b) \end{aligned}$$

también es distinto de 0 y de signo contrario al de  $F(x_1^*)$ , con lo que  $x_1^*$  y  $x_2^*$  pertenecen a cada uno de los semiplanos determinados por la recta  $R'$ .

A partir de este resultado, se obtiene la siguiente proposición:

**Proposición 5.2.2.** *Sea  $\|\cdot\|$  una norma estrictamente convexa,  $x_1$  y  $x_2$  dos puntos distintos de  $\mathbb{R}^2$  y  $R$  la recta que determinan. Dado  $x_0 \in [x_1, x_2]$  y dado  $\delta > 0$ , existen  $x_1^* \in B(x_0, \delta)$  y  $x_2^* \in B(x_0, \delta)$ , distintos de  $x_0$  y en cada uno de los semiplanos determinados por  $R$  tales que*

$$\begin{aligned} \|x_1^* - x_1\| &> \|x_0 - x_1\| \quad , \quad \|x_1^* - x_2\| > \|x_0 - x_2\| \\ \|x_2^* - x_1\| &> \|x_0 - x_1\| \quad , \quad \|x_2^* - x_2\| > \|x_0 - x_2\| \end{aligned}$$

*Demostración:*

$B_1 = B(x_1, \|x_0 - x_1\|)$  y  $B_2 = B(x_2, \|x_0 - x_2\|)$  son dos convexos tales que  $B_1^o \cap B_2^o = \emptyset$  ya que, suponer que existe  $x \in \mathbb{R}^2$  tal que

$$\|x - x_1\| < \|x_0 - x_1\| \quad \text{y} \quad \|x - x_2\| < \|x_0 - x_2\|$$

está en contradicción con la desigualdad triangular puesto que, en tal situación se tendría que

$$\|x_1 - x_2\| = \|x_1 - x_0\| + \|x_0 - x_2\| > \|x_1 - x\| + \|x - x_2\|$$

Por tanto, el teorema de Hahn-Banach, nos permite afirmar que existe una recta, que denotaremos por  $R'$ , que separa a  $B_1$  y a  $B_2$  y tal que  $x_0 \in R'$ . Así, gracias al lema anterior, podemos afirmar que existen  $x_1^* \in (R' \cap B(x_0, \delta))$  y  $x_2^* \in (R' \cap B(x_0, \delta))$  situados en cada uno de los semiplanos determinados por  $R$ .

Entonces,  $\|x_1^* - x_1\| \geq \|x_0 - x_1\|$  puesto que si  $x_1^* \in B_1^o$ , no podría pertenecer a  $R'$ . Además, la igualdad no puede darse porque estaría en contradicción con la convexidad estricta de la norma, puesto que, como para cualquier  $\alpha \in [0, 1]$  se tiene que  $\alpha \cdot x_1^* + (1 - \alpha) \cdot x_0 \in R'$ , y por tanto,  $\|\alpha \cdot x_1^* + (1 - \alpha) \cdot x_0 - x_1\| \geq \|x_0 - x_1\|$ , si se diera la igualdad, también se tendría que

$$\|\alpha \cdot x_1^* + (1 - \alpha) \cdot x_0 - x_1\| \leq \alpha \cdot \|x_1^* - x_1\| + (1 - \alpha) \cdot \|x_0 - x_1\| = \|x_0 - x_1\|$$

lo que nos conduciría a que  $[x_0, x_1^*] \subset C(x_1, \|x_0 - x_1\|)$

Por tanto, podemos afirmar que  $\|x_1^* - x_1\| > \|x_0 - x_1\|$ , pudiendo obtener el resto de las desigualdades sin más que repetir el razonamiento descrito. ■

También queremos hacer notar aquí que exigir la condición de la convexidad estricta de la norma, es también imprescindible para poder obtener las desigualdades estrictas enunciadas. En este sentido, el siguiente ejemplo nos aclara la necesidad de tal exigencia:

**EJEMPLO 12**

Si consideramos la norma  $\|\cdot\|$  y los puntos  $x_1 = (-1, -1)$ ,  $x_2 = (1, 1)$  y  $x_0 = (0, 0)$ , para cualquier  $\delta \in [0, 2]$  se tiene que si  $x^* \in B(x_0, \delta)$  y además  $\|x^* - x_1\| > \|x_0 - x_1\|$ , entonces  $\|x^* - x_2\| < \|x_0 - x_2\|$  ■

Los siguientes resultados, presentados en el mismo orden que en el capítulo 4, nos permiten alcanzar nuestro propósito para este capítulo:

**Teorema 5.2.1.** *Si  $\|\cdot\|$  es una norma estrictamente convexa,  $S$  es una región poligonal,  $x_0 \in Fr(S)$  es un óptimo de la función objetivo y  $\sigma$  es la permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  tal que*

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(m)}\|$$

entonces  $x_0$  es un vértice de  $S$  o existe  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  tal que

$$w_{\sigma(i)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(i)}\| = w_{\sigma(i+1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(i+1)}\|$$

*Demostración:*

Sea  $x_0 \in Fr(S)$  un óptimo de la función objetivo y supongamos que no es ni un vértice ni está en ninguna mediatriz. Puesto que  $\sigma$  es la permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  tal que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(m)}\|$$

y si alguna desigualdad no fuese estricta habríamos terminado, supongamos

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| < w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\| < \dots < w_{\sigma(m)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(m)}\|$$

Por la continuidad de la norma, podemos garantizar la existencia de  $\delta > 0$  tal que,  $B(x_0, \delta) \cap Fr(S)$  es un segmento que denotaremos por  $[x, y]$  y, además, para todo  $x \in B(x_0, \delta)$  se cumple que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x - a_{\sigma(m)}\|$$

$$\text{Así, } x_0 = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y$$

Por otra parte, puesto que  $x_0$  es óptimo de la función objetivo y ésta es no trivial, podemos garantizar la existencia de  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  tal que  $x_{0j} > 0$

Si  $a_{\sigma(j)}$  no estuviera alineado con  $x$  y con  $y$ , entonces

$$\|x_0 - a_{\sigma(j)}\| = \left\| \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y - a_{\sigma(j)} \right\| < \frac{1}{2} \cdot \|x - a_{\sigma(j)}\| + \frac{1}{2} \cdot \|y - a_{\sigma(j)}\|$$

y por tanto  $f(x_0) < \frac{1}{2} \cdot f(x) + \frac{1}{2} \cdot f(y)$  con lo que  $x_0$  no sería un óptimo, puesto que

- Si  $f(x) = f(y)$ , entonces  $f(x_0) < f(x)$
- Si  $f(x) < f(y)$ , entonces  $f(x_0) < f(y)$
- Si  $f(x) > f(y)$ , entonces  $f(x_0) < f(x)$

En consecuencia, si  $k_i > 0$ , entonces  $a_{\sigma(i)}$  está alineado con  $x$  y con  $y$ , lo que, de nuevo, está en contradicción con la hipótesis de ser  $x_0$  un óptimo, ya que si consideramos el conjunto

$$I = \{i \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ tales que } k_i > 0\}$$

y construimos los conjuntos

$$A_1 = \left\{ a_{\sigma(i)} \text{ para los que existe } \lambda_i > 0 \text{ tal que } a_{\sigma(i)} = x_0 + \lambda_i \cdot (y - x_0) \right\}_{i \in I}$$

$$A_2 = \left\{ a_{\sigma(i)} \text{ para los que existe } \lambda_i > 0 \text{ tal que } a_{\sigma(i)} = x_0 + \lambda_i \cdot (x - x_0) \right\}_{i \in I}$$

puede suceder que

-  $A_2 = \emptyset$ , entonces  $\|x - a_{\sigma(i)}\| = \|x - x_0\| + \|x_0 - a_{\sigma(i)}\| > \|x_0 - a_{\sigma(i)}\|$ , con lo que  $f(x) > f(x_0)$ , puesto que  $x \in B(x_0, \delta)$  y, por tanto, tienen asociada la misma permutación.

-  $A_1 = \emptyset$ , entonces  $\|y - a_{\sigma(i)}\| = \|y - x_0\| + \|x_0 - a_{\sigma(i)}\| > \|x_0 - a_{\sigma(i)}\|$ , con lo que  $f(y) > f(x_0)$ , puesto que  $y \in B(x_0, \delta)$  y, por tanto, tienen asociada la misma permutación.

- En otro caso, tomando como  $x_1$  el punto de  $A_1$  más alejado de  $x_0$  y como  $x_2$  el punto de  $A_2$  más alejado de  $x_0$ , en virtud de la proposición 5.2.2, podemos asegurar la existencia de  $x^* \in B(x_0, \delta)$  que además pertenece a  $S$  ( $x^*$  será el punto  $x_1^*$  o el punto  $x_2^*$  de esa proposición) tal que

$$\|x^* - x_1\| > \|x_0 - x_1\| \quad , \quad \|x^* - x_2\| > \|x_0 - x_2\|$$

con lo que  $f(x^*) > f(x_0)$ , puesto que

$$-\|x^* - a\| > \|x_0 - a\|, \text{ para todo } a \in A_1 \text{ ya que}$$

$$\|x^* - a\| + \|a - x_1\| \geq \|x^* - x_1\| > \|x_0 - x_1\| = \|x_0 - a\| + \|a - x_1\|$$

$$-\|x^* - a\| > \|x_0 - a\|, \text{ para todo } a \in A_2 \text{ ya que}$$

$$\|x^* - a\| + \|a - x_2\| \geq \|x^* - x_2\| > \|x_0 - x_2\| = \|x_0 - a\| + \|a - x_2\|$$

■

**Teorema 5.2.2.** Si  $\|\cdot\|$  es una norma estrictamente convexa,  $S$  es una región poligonal,  $x_0$  es un punto interior de  $S$  que es óptimo de la función objetivo y  $\sigma$  es la permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  tal que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(m)}\|$$

entonces existe  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  tal que

$$w_{\sigma(i)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(i)}\| = w_{\sigma(i+1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(i+1)}\|$$

*Demostración:*

Sea  $S$  una región poligonal y  $x_0$  un punto interior de  $S$  que es óptimo de la función objetivo. Entonces existe  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  tal que  $k_j > 0$ . Puesto que  $\sigma$  es la permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  tal que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(m)}\|$$

y si alguna desigualdad no fuese estricta habríamos terminado, supongamos que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| < w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\| < \dots < w_{\sigma(m)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(m)}\|$$

Por la continuidad de la norma, podemos garantizar la existencia de  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x \in B(x_0, \delta)$  se cumple que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x - a_{\sigma(m)}\|$$

Sea  $[x, y]$  un segmento centrado en  $x_0$  y de radio  $\delta$  tal que no esté alineado con  $a_{\sigma(j)}$ . Por tanto

$$\|x_0 - a_{\sigma(j)}\| = \left\| \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y - a_{\sigma(j)} \right\| < \frac{1}{2} \cdot \|x - a_{\sigma(j)}\| + \frac{1}{2} \cdot \|y - a_{\sigma(j)}\|$$

y, en consecuencia,  $f(x_0) < \frac{1}{2} \cdot f(x) + \frac{1}{2} \cdot f(y)$  con lo que  $x_0$  no sería un óptimo, puesto que

- Si  $f(x) = f(y)$ , entonces  $f(x_0) < f(x)$
- Si  $f(x) < f(y)$ , entonces  $f(x_0) < f(y)$
- Si  $f(x) > f(y)$ , entonces  $f(x_0) < f(x)$

■

**Teorema 5.2.3.** Si  $\|\cdot\|$  es una norma estrictamente convexa,  $S$  es una región poligonal,  $x_0$  es un punto interior de  $S$  que es un óptimo de la función objetivo y  $\sigma$  es la permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  tal que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(m)}\|$$

entonces existen  $i, j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  con  $i \neq j$  tales que

$$w_{\sigma(i)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(i)}\| = w_{\sigma(i+1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(i+1)}\|$$

$$w_{\sigma(j)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(j)}\| = w_{\sigma(j+1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(j+1)}\|$$

*Demostración:*

Supongamos que  $S$  es una región poligonal cualquiera y que  $x_0$  es un punto interior de  $S$  que es óptimo de la función objetivo. Puesto que  $\sigma$  es la permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  tal que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(m)}\|$$

en virtud del teorema anterior, existe  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  tal que

$$w_{\sigma(i)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(i)}\| = w_{\sigma(i+1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(i+1)}\|$$

Consideremos los siguientes conjuntos:

- $L = \{x \in S \mid w_{\sigma(i)} \cdot \|x - a_{\sigma(i)}\| = w_{\sigma(i+1)} \cdot \|x - a_{\sigma(i+1)}\|\}$
- $T_1 = \{x \in S \mid$

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x - a_{\sigma(1)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(i-1)} \cdot \|x - a_{\sigma(i-1)}\| \leq w_{\sigma(i)} \cdot \|x - a_{\sigma(i)}\| \leq \\ \leq w_{\sigma(i+1)} \cdot \|x - a_{\sigma(i+1)}\| \leq w_{\sigma(i+2)} \cdot \|x - a_{\sigma(i+2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x - a_{\sigma(m)}\| \Big\}$$

$$- T_2 = \{x \in S\}$$

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x - a_{\sigma(1)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(i-1)} \cdot \|x - a_{\sigma(i-1)}\| \leq w_{\sigma(i+1)} \cdot \|x - a_{\sigma(i+1)}\| \leq \\ \leq w_{\sigma(i)} \cdot \|x - a_{\sigma(i)}\| \leq w_{\sigma(i+2)} \cdot \|x - a_{\sigma(i+2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x - a_{\sigma(m)}\| \Big\}$$

$$- T = T_1 \cup T_2$$

Puesto que si  $w_{\sigma(j)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(j)}\| = w_{\sigma(j+1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(j+1)}\|$  para algún  $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  con  $i \neq j$  habríamos terminado, supongamos que, para todo  $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  con  $i \neq j$ , se cumple que

$$w_{\sigma(j)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(j)}\| < w_{\sigma(j+1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(j+1)}\|$$

Por la continuidad de la norma, existe  $\delta > 0$  tal que  $B(x_0, \delta) \subset T$ .

En virtud de la proposición 4.3.2, podemos garantizar la existencia de  $x \in (L \cap B(x_0, \delta))$  con  $x \neq x_0$ . Observemos que tanto  $x$  como  $x_0$  están tanto en  $T_1$  como en  $T_2$ .

Tomemos  $y = x_0 - (x - x_0)$ , con lo que  $x_0 = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y$ . Este punto estará en  $T_1$  o en  $T_2$ , pero, de cualquier forma, la permutación que permite evaluar  $f$  es la misma para  $x_0$ ,  $x$  e  $y$ : denotémosla por  $\tau$ .

Por otra parte, puesto que  $x_0$  es óptimo de la función objetivo y ésta es no trivial, existe  $l \in \{1, 2, \dots, m\}$  tal que  $k_l > 0$

Si  $a_{\tau(l)}$  no estuviera alineado con  $x$  y con  $y$ , entonces

$$\|x_0 - a_{\tau(l)}\| = \left\| \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y - a_{\tau(l)} \right\| < \frac{1}{2} \cdot \|x - a_{\tau(l)}\| + \frac{1}{2} \cdot \|y - a_{\tau(l)}\|$$

y por tanto  $f(x_0) < \frac{1}{2} \cdot f(x) + \frac{1}{2} \cdot f(y)$  con lo que  $x_0$  no sería un óptimo, puesto que

$$- \text{Si } f(x) = f(y), \text{ entonces } f(x_0) < f(x)$$

$$- \text{Si } f(x) < f(y), \text{ entonces } f(x_0) < f(y)$$

$$- \text{Si } f(x) > f(y), \text{ entonces } f(x_0) < f(x)$$

De esta forma, si  $k_j > 0$ , entonces  $a_{\sigma(j)}$  está alineado con  $x$  y con  $y$ , lo que de nuevo, está en contradicción con la hipótesis de ser  $x_0$  un óptimo, ya que, si consideramos el conjunto

$$J = \{j \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ tales que } k_j > 0\}$$

y construimos los conjuntos

$$A_1 = \left\{ a_{\tau(j)} \text{ para los que existe } \lambda_j > 0 \text{ tal que } a_{\tau(j)} = x_0 + \lambda_j \cdot (y - x_0) \right\}_{j \in J}$$

$$A_2 = \left\{ a_{\tau(j)} \text{ para los que existe } \lambda_j > 0 \text{ tal que } a_{\tau(j)} = x_0 + \lambda_j \cdot (x - x_0) \right\}_{j \in J}$$

Puede suceder que:

- $A_2 = \emptyset$ , entonces  $\|x - a_{\tau(j)}\| = \|x - x_0\| + \|x_0 - a_{\tau(j)}\| > \|x_0 - a_{\tau(j)}\|$ , con lo que  $f(x) > f(x_0)$ , pues  $x \in B(x_0, \delta)$  y, por tanto, tienen asociada la misma permutación.
- $A_1 = \emptyset$ , entonces  $\|y - a_{\tau(j)}\| = \|y - x_0\| + \|x_0 - a_{\tau(j)}\| > \|x_0 - a_{\tau(j)}\|$ , obteniendo que  $f(y) > f(x_0)$ , puesto que  $y \in B(x_0, \delta)$  y, en consecuencia, tienen asociada la misma permutación.
- En otro caso, tomando como  $x_1$  el punto de  $A_1$  más alejado de  $x_0$  y como  $x_2$  el punto de  $A_2$  más alejado de  $x_0$ , en virtud de la proposición 5.2.2, podemos asegurar la existencia de  $x^* \in B(x_0, \delta)$  tal que

$$\|x^* - x_1\| > \|x_0 - x_1\| \quad , \quad \|x^* - x_2\| > \|x_0 - x_2\|$$

con lo que  $f(x^*) > f(x_0)$ , en virtud de las siguientes observaciones:

- $\|x^* - a\| > \|x_0 - a\|$ , para todo  $a \in A_1$  ya que

$$\|x^* - a\| + \|a - x_1\| \geq \|x^* - x_1\| > \|x_0 - x_1\| = \|x_0 - a\| + \|a - x_1\|$$

- $\|x^* - a\| > \|x_0 - a\|$ , para todo  $a \in A_2$  pues

$$\|x^* - a\| + \|a - x_2\| \geq \|x^* - x_2\| > \|x_0 - x_2\| = \|x_0 - a\| + \|a - x_2\|$$

Así, de acuerdo con los resultados probados podemos afirmar que, si la norma utilizada es estrictamente convexa, cualquier solución del problema de localización planteado, pertenece necesariamente al conjunto  $V \cup I \cup E$  donde

- $V$  es el conjunto de vértices de  $S$

- $I$  es el conjunto de puntos  $x$  de la frontera de  $S$  tales que existe alguna pareja  $(a_p, a_j)$  de puntos distintos de  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  verificando que

$$w_i \cdot \|x - a_i\| = w_j \cdot \|x - a_j\|$$

- $E$  es el conjunto de puntos  $x$  de  $S^0$  tales que existen dos parejas distintas  $(a_p, a_q)$  y  $(a_r, a_s)$  de puntos distintos de  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  verificando que

$$w_p \cdot \|x - a_p\| = w_q \cdot \|x - a_q\| \quad \text{y} \quad w_r \cdot \|x - a_r\| = w_s \cdot \|x - a_s\|$$

### 5.3. El problema "maximin" para normas estrictamente convexas

Quizá, el problema de localización de un centro no deseado al que se han dedicado más trabajos sea el "maximin". Los resultados probados anteriormente, nos permiten extraer, de la región factible, el conjunto  $V \cup I \cup E$  en el que, en el caso de trabajar con normas estrictamente convexas, podemos asegurar que se encuentra cualquier solución óptima. Sin embargo, en esta sección probaremos que, para este problema concreto, podemos reducir aún más nuestro conjunto de puntos candidatos, basándonos en los siguientes resultados:

**Teorema 5.3.1.** *Si  $\|\cdot\|$  es una norma estrictamente convexa,  $S$  es una región poligonal,  $x_0 \in Fr(S)$  es solución del problema "maximin" y  $\sigma$  es la permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  tal que*

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(m)}\|$$

entonces  $x_0$  es un vértice de  $S$  o  $w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| = w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\|$

*Demostración:*

Sea  $x_0 \in Fr(S)$  una solución del problema "maximin" que no sea un vértice de  $S$  y supongamos que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| < w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\|$$

Por la continuidad de la norma, podemos garantizar la existencia de  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x \in B(x_0, \delta)$  se cumple que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x - a_{\sigma(m)}\|$$

y que  $B(x_0, \delta) \cap Fr(S)$  es un segmento que denotaremos por  $[x, y]$ . Así,  $x_0 = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y$

Por tanto, para todo  $x \in B(x_0, \delta)$  se cumple que  $f(x) = w_{\sigma(1)} \cdot \|x - a_{\sigma(1)}\|$  con lo que también se tiene que  $x_0 \neq a_{\sigma(1)}$  pues, en caso contrario, cualquier punto  $z_0 \in B(x_0, \delta)$  distinto de  $x_0$  cumpliría que  $f(z_0) > 0 = f(x_0)$ .

Además,  $a_{\sigma(1)}$  tendría que estar alineado con  $x$  y con  $y$ , puesto que, en otro caso

$$\|x_0 - a_{\sigma(1)}\| = \left\| \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y - a_{\sigma(1)} \right\| < \frac{1}{2} \cdot \|x - a_{\sigma(1)}\| + \frac{1}{2} \cdot \|y - a_{\sigma(1)}\|$$

conduciéndonos a que  $f(x_0) < \frac{1}{2} \cdot f(x) + \frac{1}{2} \cdot f(y)$  con lo que  $x_0$  no sería un óptimo, ya que

- Si  $f(x) = f(y)$ , entonces  $f(x_0) < f(x)$
- Si  $f(x) < f(y)$ , entonces  $f(x_0) < f(y)$
- Si  $f(x) > f(y)$ , entonces  $f(x_0) < f(x)$

Pero la condición de estar  $a_{\sigma(1)}$  alineado con  $x$  y con  $y$  también está en contradicción con la hipótesis de ser  $x_0$  un óptimo, puesto que, el punto

$$z_0 = \left( 1 + \frac{\delta}{\|x_0 - a_{\sigma(1)}\|} \right) \cdot x_0 - \frac{\delta}{\|x_0 - a_{\sigma(1)}\|} \cdot a_{\sigma(1)}$$

cumpliría que  $\|z_0 - x_0\| = \delta$  y, por tanto

$$\begin{aligned} f(z_0) &= w_{\sigma(1)} \cdot \|z_0 - a_{\sigma(1)}\| = \left( 1 + \frac{\delta}{\|x_0 - a_{\sigma(1)}\|} \right) \cdot w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| > \\ &> w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| = f(x_0) \end{aligned}$$

■

**Teorema 5.3.2.** Si  $\|\cdot\|$  es una norma estrictamente convexa,  $S$  es una región poligonal,  $x_0$  es un punto interior de  $S$  que es solución del problema "maximin" y  $\sigma$  es la permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  tal que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(m)}\|$$

entonces  $w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| = w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\|$

*Demostración:*

Sea  $S$  una región poligonal cualquiera y  $x_0$  un punto interior de  $S$  que es solución del problema "maximin" y supongamos que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| < w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\|$$

Por la continuidad de la norma, podemos garantizar la existencia de  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x \in B(x_0, \delta)$  se cumple que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x - a_{\sigma(m)}\|$$

Sea  $[x, y]$  un segmento centrado en  $x_0$  y de radio  $\delta$  tal que no esté alineado con el punto  $a_{\sigma(1)}$ . Por tanto, para todo  $z \in B(x_0, \delta)$  se cumple que  $f(z) = w_{\sigma(1)} \cdot \|z - a_{\sigma(1)}\|$  con lo que también se tiene que  $x_0 \neq a_{\sigma(1)}$  puesto que, en caso contrario, cualquier punto  $z_0 \in B(x_0, \delta)$  cumpliría que  $f(z_0) > 0 = f(x_0)$

Por tanto

$$\|x_0 - a_{\sigma(1)}\| = \left\| \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y - a_{\sigma(1)} \right\| < \frac{1}{2} \cdot \|x - a_{\sigma(1)}\| + \frac{1}{2} \cdot \|y - a_{\sigma(1)}\|$$

y así,  $f(x_0) < \frac{1}{2} \cdot f(x) + \frac{1}{2} \cdot f(y)$  lo que nos lleva a contradicción con que  $x_0$  sea un óptimo, puesto que

- Si  $f(x) = f(y)$ , entonces  $f(x_0) < f(x)$
- Si  $f(x) < f(y)$ , entonces  $f(x_0) < f(y)$
- Si  $f(x) > f(y)$ , entonces  $f(x_0) < f(x)$

■

**Teorema 5.3.3.** Si  $\|\cdot\|$  es una norma estrictamente convexa,  $S$  es una región poligonal,  $x_0$  es un punto interior de  $S$  que es solución del problema "maximin" y  $\sigma$  es la permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  tal que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(m)}\|$$

entonces  $w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| = w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\| = w_{\sigma(3)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(3)}\|$

*Demostración:*

Supongamos que  $S$  es una región poligonal cualquiera y que  $x_0$  es un punto interior de  $S$  que es solución del problema "maximin". Puesto que  $\sigma$  es la permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  tal que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(m)}\|$$

en virtud del teorema anterior, sabemos que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| = w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\|$$

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$- L = \{x \in S \mid w_{\sigma(1)} \cdot \|x - a_{\sigma(1)}\| = w_{\sigma(2)} \cdot \|x - a_{\sigma(2)}\|\}$$

$$- T_1 = \{x \in S \mid$$

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x - a_{\sigma(2)}\| \leq w_{\sigma(3)} \cdot \|x - a_{\sigma(3)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x - a_{\sigma(m)}\|\}$$

$$- T_2 = \{x \in S \mid$$

$$w_{\sigma(2)} \cdot \|x - a_{\sigma(2)}\| \leq w_{\sigma(1)} \cdot \|x - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(3)} \cdot \|x - a_{\sigma(3)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x - a_{\sigma(m)}\|\}$$

$$- T = T_1 \cup T_2$$

Supongamos que,  $w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\| < w_{\sigma(3)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(3)}\|$ . Por la continuidad de la norma, podemos garantizar la existencia de  $\delta > 0$  tal que  $B(x_0, \delta) \subset T$ .

En virtud de la proposición 4.3.2, existe  $x \in (L \cap B(x_0, \delta))$  con  $x \neq x_0$ . Observemos que tanto  $x$  como  $x_0$  están tanto en  $T_1$  como en  $T_2$ .

Tomemos  $y = x_0 - (x - x_0)$ , con lo que  $x_0 = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y$ . Este punto estará en  $T_1$  o en  $T_2$ , pero, de cualquier forma, la permutación que permite evaluar  $f$  es la misma para  $x_0$ ,  $x$  e  $y$ : denotemos por  $\tau$  a esa permutación común.

Por tanto, para todo  $x \in B(x_0, \delta)$  se cumple que  $f(x) = w_{\sigma(1)} \cdot \|x - a_{\sigma(1)}\|$  con lo que también se tiene que  $x_0 \neq a_{\tau(i)}$  puesto que, en caso contrario, cualquier punto  $z_0 \in B(x_0, \delta)$  cumpliría que  $f(z_0) > 0 = f(x_0)$ .

Si  $a_{\tau(i)}$  no estuviera alineado con  $x$  y con  $y$ , entonces

$$\|x_0 - a_{\tau(1)}\| = \left\| \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y - a_{\tau(1)} \right\| < \frac{1}{2} \cdot \|x - a_{\tau(1)}\| + \frac{1}{2} \cdot \|y - a_{\tau(1)}\|$$

y por tanto  $f(x_0) < \frac{1}{2} \cdot f(x) + \frac{1}{2} \cdot f(y)$  con lo que  $x_0$  no sería un óptimo, puesto que

- Si  $f(x) = f(y)$ , entonces  $f(x_0) < f(x)$
- Si  $f(x) < f(y)$ , entonces  $f(x_0) < f(y)$
- Si  $f(x) > f(y)$ , entonces  $f(x_0) < f(x)$

Pero la condición de estar  $a_{\tau(1)}$  alineado con  $x$  y con  $y$  también está en contradicción con la hipótesis de ser  $x_0$  un óptimo, puesto que, el punto

$$z_0 = \left( 1 + \frac{\delta}{\|x_0 - a_{\tau(1)}\|} \right) \cdot x_0 - \frac{\delta}{\|x_0 - a_{\tau(1)}\|} \cdot a_{\tau(1)}$$

cumpliría que  $\|z_0 - x_0\| = \delta$  y, por tanto

$$\begin{aligned} f(z_0) &= w_{\tau(1)} \cdot \|z_0 - a_{\tau(1)}\| = \left( 1 + \frac{\delta}{\|x_0 - a_{\tau(1)}\|} \right) \cdot w_{\tau(1)} \cdot \|x_0 - a_{\tau(1)}\| > \\ &> w_{\tau(1)} \cdot \|x_0 - a_{\tau(1)}\| = f(x_0) \end{aligned}$$

■

En resumen, como consecuencia de los teoremas 5.3.1 y 5.3.3 se obtiene que la solución del problema “maximin”, cuando nos restringimos a una región poligonal  $S$  es, o bien un vértice de  $S$ , o un punto de la frontera de  $S$  que equidista ponderadamente de los dos puntos  $a_i$  más próximos al centro a instalar, o un punto interior de  $S$  que equidista ponderadamente de los tres más próximos a dicho centro. Así, para el caso en el que el criterio elegido para determinar la ubicación óptima de un centro no deseado sea el “maximin”, las posibles intersecciones de mediatrices ponderadas nos lleva a considerar  $\binom{m}{3} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{6}$  casos posibles, obteniendo una notable reducción sobre dicho número de posibilidades que, para un criterio cualquiera es

$$\binom{\binom{m}{2}}{2} = \frac{(m-2) \cdot (m-1) \cdot m \cdot (m+1)}{4}$$



## **CAPÍTULO VI:**

### **ESTUDIO DEL PROBLEMA PARA LA NORMA EUCLÍDEA**



## Estudio del problema para la norma euclídea

En los capítulos anteriores hemos establecido un modelo de localización de centros no deseados que, como hemos dicho, contiene como casos particulares la práctica totalidad de los problemas clásicos de localización de este tipo. A partir de él hemos extraído propiedades que serán comunes a todos los criterios y hemos caracterizado un conjunto dentro del cual podemos asegurar que está la solución, con independencia del criterio con el que trabajemos.

Ahora nos detenemos en el caso particular en el que la distancia utilizada es aquella que se deriva de la norma euclídea. En realidad muchos de los problemas de localización de centros no deseados en el plano que aparecen en la bibliografía usan esta distancia debido a la naturaleza de la propagación del impacto producido por el centro que deseamos localizar.

Observaremos como, en este caso, el conjunto que obtuvimos en el capítulo anterior, además de contener a todas las soluciones del correspondiente problema asociado a cualquiera de nuestros criterios, es finito, por lo que podremos construir rutinas que busquen la solución en un tiempo razonable. Especifiquemos el planteamiento general, en este caso, de nuestro problema:

Dado un subconjunto  $S$  cerrado y acotado del plano, una colección de puntos del plano  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  y cada uno de ellos tiene asociado un valor positivo  $w(a_i) = w_i$ , al que llamaremos peso de la población  $a_i$ , nuestro interés se centra en maximizar la siguiente función objetivo

$$f(x) = \sum_{i=1}^m k_i \cdot w_{\sigma(i)} \cdot \|x - a_{\sigma(i)}\|$$

donde:

- $\sigma$  es la permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  tal que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x - a_{\sigma(m)}\|$$

- $k_1, k_2, \dots, k_m$  son  $m$  constantes no negativas que vendrán determinadas al especificar la política a seguir y
- $\|\cdot\|$  es la norma euclídea.

Merece la pena, antes de proceder a la búsqueda del conjunto solución, extendernos un poco con algunas observaciones que, en algún caso, ya habíamos apuntado con anterioridad:

- Como la norma euclídea es una norma estrictamente convexa, serán de aplicación los resultados obtenidos en el capítulo anterior.
- La elección de las constantes  $k_i$  marcará el criterio específico a utilizar. Esta elección se debería realizar estudiando sociológicamente el problema y, por tanto, se corresponde con una opción que debe realizar el que lo genera. De todas formas, el conjunto (que en este caso es finito, como se pondrá de manifiesto más adelante) donde se encuentra la solución lo determinaremos con independencia de los valores que adoptemos para los  $k_i$ , con lo que el problema estará siempre resuelto. Por esto, nuestro problema es claramente multicriterio y, como ya hemos establecido, contiene como casos particulares los problemas clásicos de localización ("maximin", "maxisum", etc) sin más que dar unos valores específicos a las constantes.

Además, si se consideran  $j$  criterios diferentes, siendo cada uno de ellos el determinado por unas constantes no negativas  $k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{im}$ , con  $i = 1, 2, \dots, j$ , un procedimiento usual en la toma de decisiones multicriterio consiste en la construcción de uno nuevo a partir de la suma ponderada de los criterios considerados, asociando a cada uno de ellos un peso positivo  $v_i$ , que refleja la importancia que el decisor asigna a cada uno de ellos. Así, este nuevo criterio, determinado por las constantes  $\left( \sum_{i=1}^j (v_i \cdot k_{i1}), \sum_{i=1}^j (v_i \cdot k_{i2}), \dots, \sum_{i=1}^j (v_i \cdot k_{im}) \right)$ , pertenecerá a la familia de criterios para los que nuestro modelo es aplicable, con lo que la correspondiente solución también pertenecerá a nuestro conjunto.

- La elección de los pesos es una cuestión bastante más compleja; dediquemos algunos comentarios a indicar las dificultades con las que nos encontramos a este respecto:

No está muy claro cómo se han de elegir los pesos  $w_i$  del modelo propuesto, ni siquiera, cuando estudiemos un problema particular. Fijemos como criterio, por ejemplo, el criterio "maximin": según el problema a tratar, la asignación de los pesos puede ser diferente

según la interpretación que se dé de los mismos. Si creemos que sólo debemos tener en cuenta el número de habitantes que se pueden ver afectados (caso, por ejemplo, de una central nuclear que afectaría a los habitantes de las poblaciones en caso de catástrofe) parece razonable que las constantes  $w_i$  estuvieran relacionadas de manera inversa con el número de habitantes de la población  $a_i$ . Sin embargo, si siendo el centro molesto para los habitantes de las poblaciones, no implica riesgo vital para las personas (por ejemplo, la ubicación de una central eólica que podría generar cierta contaminación acústica o un impacto estético, pero que no afecta a la salud de los habitantes de las poblaciones) lo que parece más lógico es que los pesos sean asignados en función del uso que cada población haga del centro a instalar; en este caso, lo razonable es que los pesos sean adoptados por un criterio directamente relacionado con el número de habitantes de la población. De esta forma, el centro estará más cerca de la población que más lo utilice.

A la vista de estos comentarios, la elección de los pesos no sólo se relaciona, de una u otra forma, con el tamaño de la población sino que también está muy íntimamente ligada al criterio que se adopte. De forma general podríamos indicar que, una vez que hemos adoptado una manera de elegir los pesos, el criterio más apropiado no siempre es el mismo. Así, si se toman los pesos de manera inversamente relacionada con el tamaño de la población, el criterio "maximin" respeta más a las poblaciones de mayor número de habitantes y la solución tiende a alejarse de ellas, mientras que si adoptamos el criterio "maxisum" estamos respetando más a las poblaciones de menor número de habitantes y la solución tiende a situarse más cerca de las grandes poblaciones. Todo esto sucedería al revés si los pesos están directamente relacionados con el número de habitantes de cada población.

Aunque no conocemos una regla fija, el párrafo anterior nos proporciona una cierta idea de cómo podríamos adoptar de una forma genérica la elección de los pesos. En la práctica, los modelos que se eligen son los que se obtienen al asignar valores iguales a uno a los  $r$  primeros  $k_i$  y cero a los demás; es decir, se trata de criterios intermedios entre el "maximin" y el "maxisum". Aún sabiendo, en este caso, cuáles son las poblaciones más sensibles al efecto que produce el centro a ubicar, no está muy claro cómo se debieran asignar los pesos, aunque una posibilidad consiste en asignarlos inversa o directamente relacionados con el número de habitantes según que el criterio sea "más parecido" al "maximin" que al "maxisum".

En cualquier caso, observemos que la principal utilidad del modelo radica en la construcción de una "nube de puntos" que contiene a la solución de los problemas admisibles para nuestro modelo, entre los que figuran los

usuales, con lo cual, una vez fijados los pesos, podemos determinar las soluciones del correspondiente problema de localización de un centro no deseado, sin más que evaluar la función objetivo en los puntos obtenidos, con lo que con un gasto computacional mínimo podemos observar cuál es la mejor elección de las constantes  $k_i$  que nos lleve a la ubicación menos nociva para todas las poblaciones. Sirva el siguiente ejemplo para ilustrar este comentario:

### EJEMPLO 13

Consideremos las 21 poblaciones equiponderadas cuyas coordenadas (expresadas en kilómetros) se muestran en la tabla siguiente y marcadas con un asterisco en la figura 6.1. Supongamos que queremos ubicar una central nuclear dentro de la región determinada por los 4 primeros puntos de la columna de la izquierda y que, si ocurriera un desastre nuclear, las probabilidades de supervivencia de los habitantes de cada población disminuyen en función de la distancia que la separa de dicha central.

Población	Población
(0,0)	(5,25)
(33,0)	(12,23)
(33,28)	(17,9)
(0,28)	(20,4)
(17,2)	(30,4)
(14,15)	(27,10)
(5,4)	(29,16)
(12,7)	(30,22)
(7,11)	(19,24)
(9,15)	(25,24)
(6,18)	

Si optamos por determinar la mejor ubicación para la instalación utilizando el criterio "maximin", quedaría situada en el punto marcado con un cuadrado en la figura 6.1. En ella, hemos destacado tres circunferencias centradas en este posible emplazamiento y de radios 7.26, 9.47 y 13.57 kilómetros, respectivamente. Las poblaciones situadas en cada una de estas circunferencias, se verían afectadas por distintos niveles de radiación, siendo el número de tales poblaciones 3, 6 y 11 respectivamente.

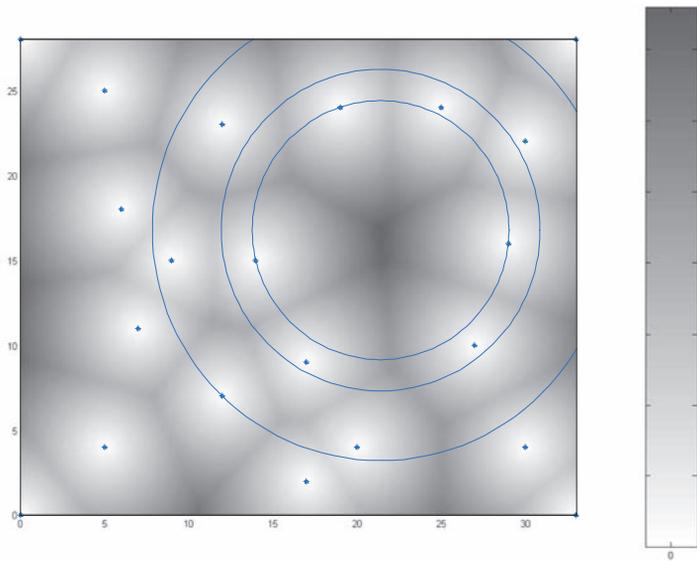


Figura 6.1.

Por otra parte, si la ubicación posible la decidimos en base al criterio “maxisum”, el número de poblaciones afectadas por los mismos niveles anteriormente descritos son, respectivamente, 2, 2 y 4. Sin embargo, tal ubicación (marcada con un cuadrado en la figura 6.2) parece completamente inadmisibles, puesto que conduce al holocausto a todos los habitantes de la población sobre la que se situaría la hipotética central nuclear.

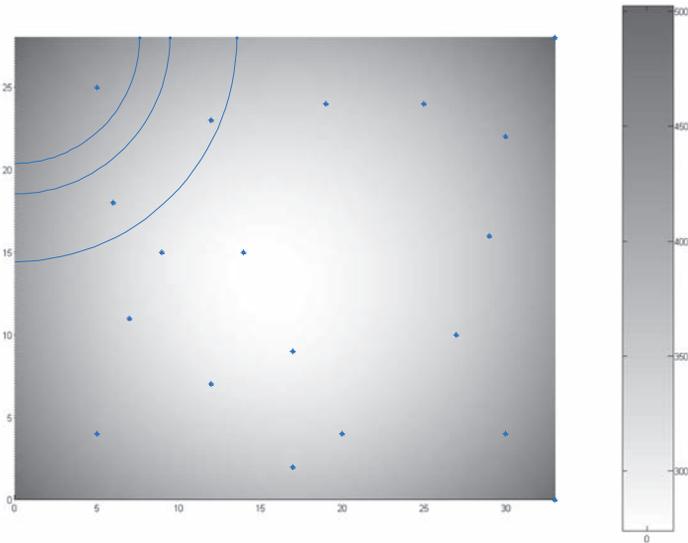


Figura 6.2.

A la vista de la figura 6.3, asociada al criterio correspondiente al “4-anticentro” y en la que se ha resaltado también las circunferencias correspondientes a los mismos niveles de radiación, esta posible ubicación (marcada con un cuadrado) parece menos nociva que cualquiera de las dos anteriores, habida cuenta que el número de poblaciones afectadas por cada uno de los niveles es, respectivamente, 1, 4 y 6

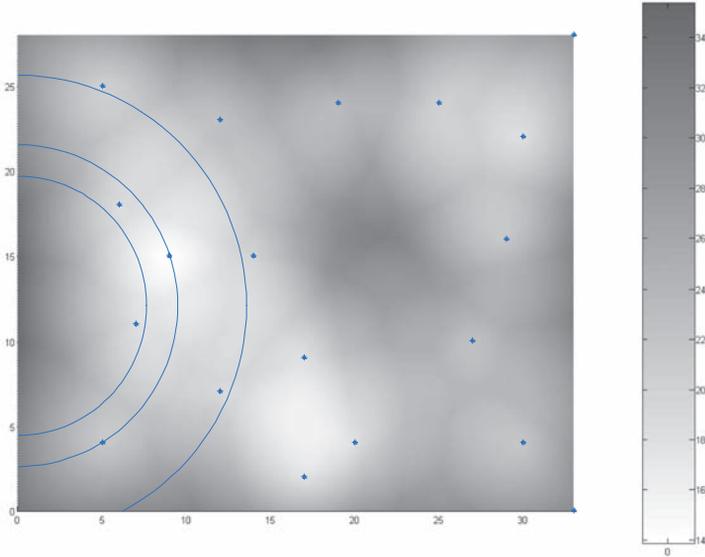


Figura 6.3.

Puesto que la norma euclídea es una norma estrictamente convexa, podemos afirmar, gracias a los resultados del capítulo anterior, que las soluciones de cualquiera de nuestros problemas de localización de un centro no deseado, cuando la región  $S$  es poligonal, estará en nuestro conjunto  $V \cup I \cup E$ . Para la determinación de los puntos de dicho conjunto recordemos que, en este caso, la mediatriz ponderada asociada a un par de puntos  $P$  y  $Q$ , con pesos  $w_P$  y  $w_Q$  respectivamente, que es

$$M(P, Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } w_P \cdot \|x - P\| = w_Q \cdot \|x - Q\| \right\}$$

- si  $w_P = w_Q$ , es la perpendicular al segmento que une  $P$  con  $Q$  y que pasa por el punto medio; es decir, la recta cuya ecuación general es

$$(Q_x - P_x) \cdot x + (Q_y - P_y) \cdot y + \frac{P_x^2 + P_y^2 - Q_x^2 - Q_y^2}{2} = 0$$

siendo  $P = (P_x, P_y)$  y  $Q = (Q_x, Q_y)$

- si  $w_P \neq w_Q$ , es la circunferencia de centro  $C$  y radio  $r$  siendo

$$C = \frac{w_P^2}{w_P^2 - w_Q^2} \cdot P - \frac{w_Q^2}{w_P^2 - w_Q^2} \cdot Q ; r = \frac{w_P \cdot w_Q \cdot \|P - Q\|}{|w_P^2 - w_Q^2|}$$

Además, cuando la norma considerada es la euclídea, podemos afirmar que el citado conjunto es finito y construible a partir de un algoritmo de complejidad  $\mathcal{O}(n \cdot m^2 + m^4)$ , orden que también será reducible en el caso en el que queramos únicamente resolver el problema "maximin", pudiendo construir su solución, a través de nuestros resultados, con un algoritmo de complejidad  $\mathcal{O}(n \cdot m^2 + m^3)$ .

Podemos justificar que el conjunto  $V \cup I \cup E$ , indicado en la sección 5.2 es finito ya que

- el conjunto  $V \cup I$  obtenido como consecuencia del teorema 5.2.1 es finito salvo que, siendo  $x_0 \in Fr(S)$  un óptimo de la función objetivo que pertenece a una arista  $L$  y  $\sigma$  es la permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  tal que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(m)}\|$$

las mediatrices ponderadas  $M(a_{\sigma(i)}, a_{\sigma(i+1)})$  que contienen a  $x_0$  se intersecan con  $L$  en un segmento. En tal caso, existe un segmento  $[x^*, y^*]$  centrado en  $x_0$  tal que, para todo  $x \in [x^*, y^*]$  se cumple que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x - a_{\sigma(m)}\|$$

y procediendo de forma similar a la demostración del teorema 5.2.1 llegaríamos a una contradicción, puesto que, como la función objetivo es no trivial, existe  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  tal que  $k_j > 0$ .

Si  $a_{\sigma(j)}$  no estuviera alineado con  $x^*$  y con  $y^*$ , entonces

$$\|x_0 - a_{\sigma(j)}\| = \left\| \frac{1}{2} \cdot x^* + \frac{1}{2} \cdot y^* - a_{\sigma(j)} \right\| < \frac{1}{2} \cdot \|x^* - a_{\sigma(j)}\| + \frac{1}{2} \cdot \|y^* - a_{\sigma(j)}\|$$

y por tanto  $f(x_0) < \frac{1}{2} \cdot f(x^*) + \frac{1}{2} \cdot f(y^*)$  con lo que  $x_0$  no sería un óptimo, puesto que

- Si  $f(x^*) = f(y^*)$ , entonces  $f(x_0) < f(x^*)$
- Si  $f(x^*) < f(y^*)$ , entonces  $f(x_0) < f(y^*)$
- Si  $f(x^*) > f(y^*)$ , entonces  $f(x_0) < f(x^*)$

Por tanto, si  $k_i > 0$ , entonces  $a_{\sigma(i)}$  está alineado con  $x^*$  y con  $y^*$ , lo que de nuevo, está en contradicción con la hipótesis de ser  $x_0$  un óptimo, puesto que, si consideramos el conjunto

$$I = \{i \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ tales que } k_i > 0\}$$

y construimos los conjuntos

$$A_1 = \left\{ a_{\sigma(i)} \text{ para los que existe } \lambda_i > 0 \text{ tal que } a_{\sigma(i)} = x_0 + \lambda_i \cdot (y^* - x_0) \right\}_{i \in I}$$

$$A_2 = \left\{ a_{\sigma(i)} \text{ para los que existe } \lambda_i > 0 \text{ tal que } a_{\sigma(i)} = x_0 + \lambda_i \cdot (x^* - x_0) \right\}_{i \in I}$$

puede suceder que:

- Si  $A_2 = \emptyset$ , entonces  $\|x^* - a_{\sigma(i)}\| = \|x^* - x_0\| + \|x_0 - a_{\sigma(i)}\| > \|x_0 - a_{\sigma(i)}\|$ , con lo que  $f(x^*) > f(x_0)$ , puesto que  $x^*$  y  $x_0$  tienen asociada la misma permutación.
- Si  $A_1 = \emptyset$ , entonces  $\|y^* - a_{\sigma(i)}\| = \|y^* - x_0\| + \|x_0 - a_{\sigma(i)}\| > \|x_0 - a_{\sigma(i)}\|$ , con lo que  $f(y^*) > f(x_0)$ , puesto que  $y^*$  y  $x_0$  tienen asociada la misma permutación.
- En otro caso, tomando como  $x_1$  el punto de  $A_1$  más alejado de  $x_0$  y como  $x_2$  el punto de  $A_2$  más alejado de  $x_0$ , en virtud de la proposición 5.2.2, podemos asegurar la existencia de  $z \in S$  que además tendrá asociada la misma permutación  $\sigma$  ( $z$  será el punto  $x_1^*$  o el punto  $x_2^*$  de esa proposición) tal que

$$\|z - x_1\| > \|x_0 - x_1\| \quad , \quad \|z - x_2\| > \|x_0 - x_2\|$$

con lo que  $f(z) > f(x_0)$ , puesto que

- $\|z - a\| > \|x_0 - a\|$ , para todo  $a \in A_1$  ya que

$$\|z - a\| + \|a - x_1\| \geq \|z - x_1\| > \|x_0 - x_1\| = \|x_0 - a\| + \|a - x_1\|$$

- $\|z - a\| > \|x_0 - a\|$ , para todo  $a \in A_2$  ya que

$$\|z - a\| + \|a - x_2\| \geq \|z - x_2\| > \|x_0 - x_2\| = \|x_0 - a\| + \|a - x_2\|$$



Además, destaquemos que este razonamiento también es aplicable si las mediatrices ponderadas  $M(a_{\sigma(i)}, a_{\sigma(i+1)})$  que contienen a  $x_0$  son tangentes a  $L$  en dicho punto, con lo que también podríamos excluir dichos cortes del conjunto  $I$ .

- el conjunto  $E$  obtenido como consecuencia del teorema 5.2.3 es finito salvo que, siendo  $x_0$  un punto interior de  $S$  que es un óptimo de la función objetivo y  $\sigma$  es la permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  tal que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x_0 - a_{\sigma(m)}\|$$

las mediatrices ponderadas  $M(a_{\sigma(i)}, a_{\sigma(i+1)})$  y  $M(a_{\sigma(j)}, a_{\sigma(j+1)})$  que contienen a  $x_0$  sean iguales. En tal caso, existe un segmento  $[x^*, y^*]$  centrado en  $x_0$  tal que, para todo  $x \in [x^*, y^*]$  se cumple que

$$w_{\sigma(1)} \cdot \|x - a_{\sigma(1)}\| \leq w_{\sigma(2)} \cdot \|x - a_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq w_{\sigma(m)} \cdot \|x - a_{\sigma(m)}\|$$

y procediendo de forma similar al razonamiento anterior llegaríamos, de nuevo, a una contradicción.

Además, destaquemos que este razonamiento también es aplicable si las mediatrices ponderadas  $M(a_{\sigma(i)}, a_{\sigma(i+1)})$  y  $M(a_{\sigma(j)}, a_{\sigma(j+1)})$  que contienen a  $x_0$  son tangentes entre sí en dicho punto, con lo que también podríamos excluir dichos cortes del conjunto  $E$ . ■

Así, gracias a los resultados probados, podemos afirmar que, en el caso en el que la norma utilizada sea la euclídea, cualquier solución a los problemas de localización aquí estudiados, pertenecen al conjunto  $V \cup I \cup E$  siendo

- $V$  el conjunto de vértices de  $E$ .
- $I$  el conjunto de puntos  $x$  en los que la frontera de  $S$  se corta transversalmente con las mediatrices ponderadas  $M(a_p, a_j)$  para alguna pareja  $(a_p, a_j)$  de puntos distintos de  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ .
- $E$  el conjunto de puntos  $x$  de  $S^\circ$  en los que se cortan transversalmente dos mediatrices ponderadas  $M(a_p, a_q)$  y  $M(a_r, a_s)$  para dos parejas distintas  $(a_p, a_q)$  y  $(a_r, a_s)$  de puntos distintos de  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

Además, dicho conjunto es finito y se puede determinar con un algoritmo de orden  $\mathcal{O}(n \cdot m^2 + m^4)$ , siendo  $n$  el número de lados de la región poligonal  $S$ , puesto que

- $V$  tiene  $n$  puntos,

- cada una de las  $n$  aristas de  $S$  se corta, a lo sumo, en dos puntos con cada una de las, a lo sumo,  $\binom{m}{2}$  mediatrices ponderadas distintas, y
- al cortar entre sí, cada una de las mediatrices ponderadas distintas, obtenemos, a lo sumo,  $\binom{\binom{m}{2}}{2}$  puntos distintos.

### 6.1. El problema “maximin” para la norma euclídea

De la misma forma, y por lo probado en los teoremas 5.3.1 y 5.3.3, podemos afirmar que, en el caso en el que la norma utilizada sea la euclídea, cualquier solución al problema “maximin”, cuando nos restringimos a una región poligonal  $S$ , pertenece al conjunto  $V \cup I \cup E$ , donde

- $V$  es el conjunto de vértices de  $S$ .
- $I$  es el conjunto de puntos  $x$  en los que la frontera de  $S$  se corta transversalmente con las mediatrices ponderadas  $M(a_p, a_j)$  siendo  $a_i$  y  $a_j$  las dos poblaciones distintas más cercanas a  $x$ .
- $E$  es el conjunto de puntos  $x$  de  $S^o$  en los que se cortan transversalmente dos mediatrices ponderadas  $M(a_p, a_q)$  y  $M(a_q, a_r)$  para la terna  $(a_p, a_q, a_r)$  de puntos distintos más cercanos a  $x$ .

Además, dicho conjunto es finito y se puede determinar con un algoritmo de orden  $\mathcal{O}(n \cdot m^2 + m^3)$ , siendo  $n$  el número de vértices de la región poligonal  $S$  (aunque existen algoritmos de orden inferior y así, por ejemplo en (Melachrinoudis y MacGregor Smith, 1995), podemos encontrar un algoritmo de orden  $\mathcal{O}(n \cdot m^2)$ )

### 6.2. Comentarios adicionales y ejemplos

A nivel teórico, nuestro modelo es válido para cualquiera de los criterios que podamos especificar a través de una determinada elección de las constantes  $k_i$ , sea cual sea la norma utilizada, con lo que su utilización es recomendable para aquellas situaciones en las que una norma distinta a las habituales refleje, de forma más efectiva, las particularidades del problema planteado.

También es aconsejable la utilización de nuestro modelo en aquellos problemas en los que se pueda optar por varios criterios, pues, aunque la construcción de los puntos de nuestro conjunto  $V \cup I \cup E$  pueda parecer pesada

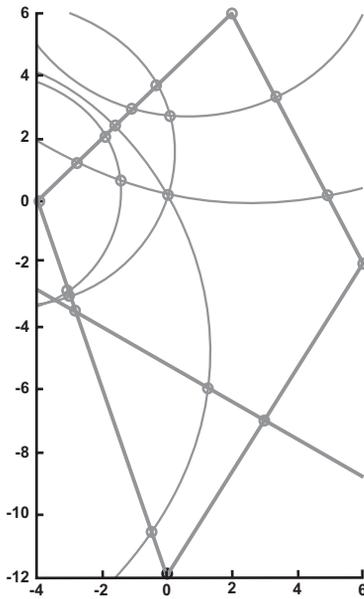
(sobre todo si el número de poblaciones iniciales es considerable), esa inversión previa de tiempo redundará en una determinación, casi inmediata, de la solución óptima para cada uno de los criterios seleccionados, con lo que obtenemos un algoritmo muy eficaz, sobre todo cuando el número de tales criterios es elevado.

A modo de ejemplo, para el caso en el que los problemas de localización de un centro no deseado se planteen en términos de la norma euclídea, con la ayuda de MATLAB hemos construido una rutina (en la sección 7.5 y denominada *undesirable*), de la que, a continuación, ejemplificaremos su utilización y aplicaciones prácticas, que, dada una matriz  $P$  conteniendo las coordenadas de las poblaciones afectadas, una matriz  $Q$  con los vértices de una región poligonal y un vector de pesos asociado a los puntos de la matriz  $P$ , determina las coordenadas de los puntos candidatos a solución de cualquiera de nuestros problemas de localización de un centro no deseado.

#### EJEMPLO 14

Consideremos la región poligonal determinada por 4 poblaciones ubicadas en los puntos  $a_1 = (-4, 0)$ ,  $a_2 = (2, 6)$ ,  $a_3 = (6, -2)$  y  $a_4 = (0, -12)$  marcadas con un asterisco en la figura adjunta, con pesos respectivos 3, 2, 1 y 1. Nuestra rutina genera, en 0.39 segundos, tanto las coordenadas de cada una de las 20 posibles soluciones (indicadas abajo y marcadas con un círculo en la figura) de cualquiera de los problemas de localización de un centro no deseado que admite nuestro modelo general, como una solución óptima para cada uno de los  $2^4 = 16$  problemas asociados a las posibles elecciones de  $k_i \in \{0, 1\}$ , cuando nos restringimos a la región poligonal indicada.

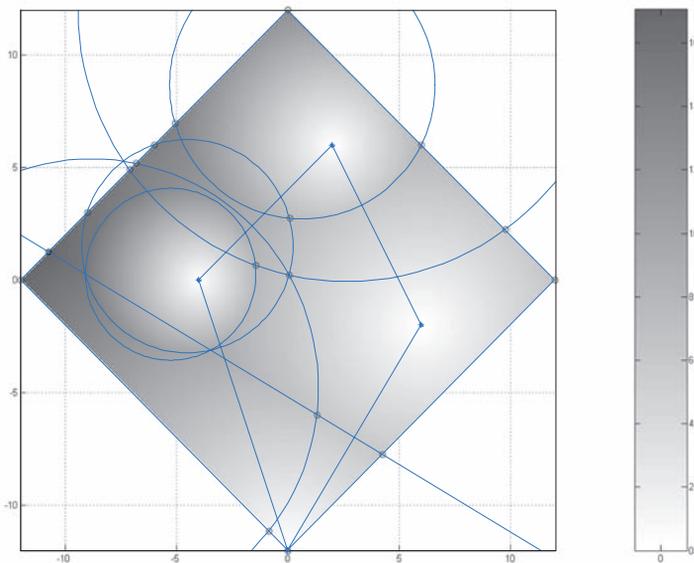
(-4.0000,0)	(-1.9019,2.0981)	(-0.2984,3.7016)	(2.0000,6.0000)
(-3.0424,-2.8728)	(-1.6000,2.4000)	(0,-12.0000)	(3.0000,-7.0000)
(-3.0000,-3.0000)	(-1.4465,0.6484)	(0.0646,0.2099)	(3.3333,3.3333)
(-2.8333,-3.5000)	(-1.0452,2.9548)	(0.0804,2.7327)	(4.9299,0.1402)
(-2.7770,1.2230)	(-0.4551,-10.6346)	(1.3128,-5.9877)	(6.0000,-2.0000)



Criterio	Solución
(0 0 0 0)	(-4.0000, 0)
(0 0 0 1)	(0,-12.0000)
(0 0 1 0)	(0,-12.0000)
(0 0 1 1)	(0,-12.0000)
(0 1 0 0)	(4.9299,0.1402)
(0 1 0 1)	(0,-12.0000)
(0 1 1 0)	(0,-12.0000)
(0 1 1 1)	(0,-12.0000)
(1 0 0 0)	(-3.0424,-2.8728)
(1 0 0 1)	(0,-12.0000)
(1 0 1 0)	(0,-12.0000)
(1 0 1 1)	(0,-12.0000)
(1 1 0 0)	(-1.6000,2.4000)
(1 1 0 1)	(0,-12.0000)
(1 1 1 0)	(0,-12.0000)
(1 1 1 1)	(0,-12.0000)

**EJEMPLO 15**

Para las mismas poblaciones del ejemplo anterior, con los mismos pesos, y también considerando la norma euclídea, en la siguiente figura hemos trazado las mediatrices ponderadas correspondientes, representando por un círculo las 22 posibles soluciones de cualquiera de nuestros problemas de localización de un centro no deseado, cuando nos restringimos a la poligonal determinada por los puntos (-12, 0), (0, -12), (12, 0) y (12, 0).

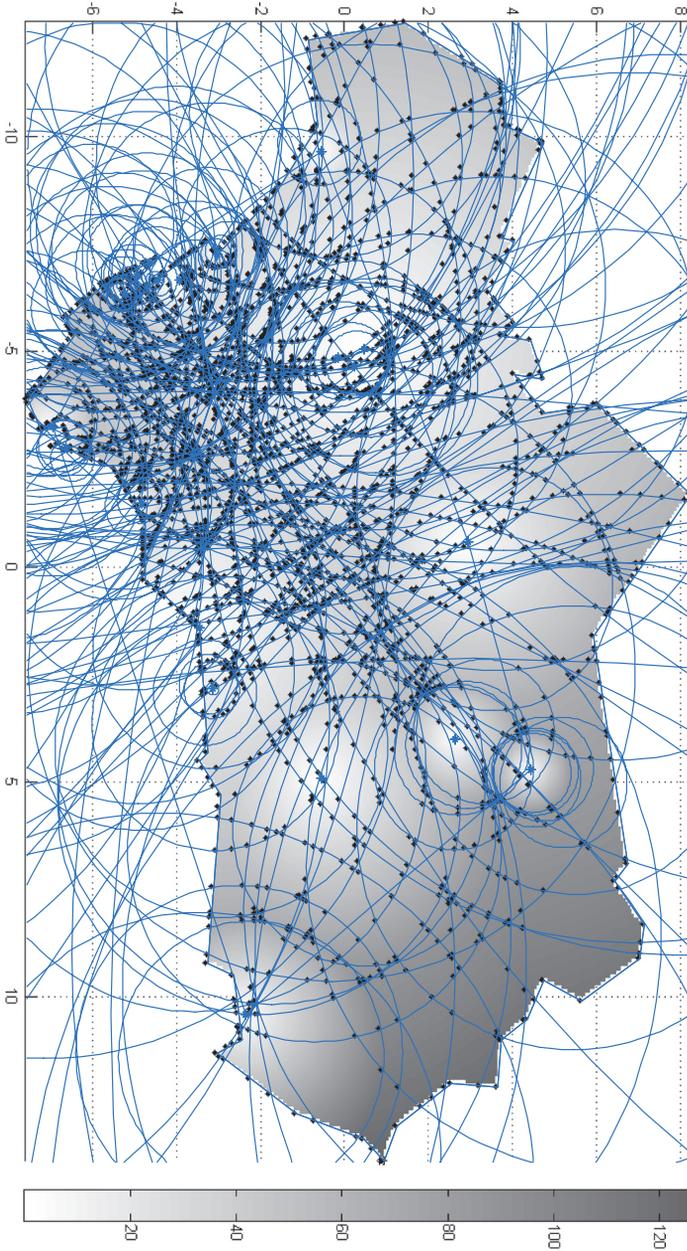


Destaquemos que, en virtud de los resultados obtenidos en el capítulo 3, para determinar el máximo valor de la función objetivo podemos obviar las intersecciones de dos mediatrices distintas que no pertenezcan a  $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ . Además, hemos incluido un mapa de grises, hemos representando los valores de la función objetivo correspondiente al criterio "maximin" según la barra que aparece a la derecha y tras la evaluación de cada una de las 22 posibles soluciones, podemos afirmar que la única solución de este problema es el punto  $\left(\frac{-43}{4}, \frac{5}{4}\right)$ , resaltado en la figura con una estrella negra.

### EJEMPLO 16

En la siguiente figura hemos representado con un asterisco las 20 poblaciones andaluzas con más de 50.000 habitantes, las mediatrices ponderadas correspondientes, las 5903 posibles soluciones (punteadas) y, con un mapa de grises los valores de la función objetivo asociada al problema "maximin" y su solución marcada con una estrella negra, cuando los pesos son asignados inversamente proporcionales al tamaño de la población (En la tabla siguiente se muestran, tanto las coordenadas de los núcleos de población considerados, como el número de habitantes, en miles, de cada uno).

Coordenadas	Localidad	Población (en miles)	Coordenadas	Localidad	Población (en miles)
(10.4,-2.4)	Almería	167	(-4.9,-0.2)	Dos Hermanas	83
(-7.1,-4.7)	Cádiz	155	(-6.7,-4.0)	Jerez	190
(-0.6,2.9)	Córdoba	316	(-3.3,-7.0)	Algeciras	104
(4.9,-0.6)	Granada	271	(-6.4,-5.3)	Chiclana	51
(-9.7,-0.6)	Huelva	145	(-2.8,-6.7)	La Línea	61
(4.0,2.6)	Jaén	113	(-6.7,-4.5)	Puerto Sta. M <sup>a</sup>	70
(1.4,-3.5)	Málaga	531	(-6.8,-5.0)	San Fernando	88
(-5.1,0.4)	Sevilla	714	(-7.3,-3.1)	Sanlúcar de Bmda.	60
(4.7,4.4)	Linares	62	(-1.5,-4.9)	Marbella	86
(-4.7,0.2)	Alcalá de Guadaira	55	(2.8,-3.2)	Vélez-Málaga	54

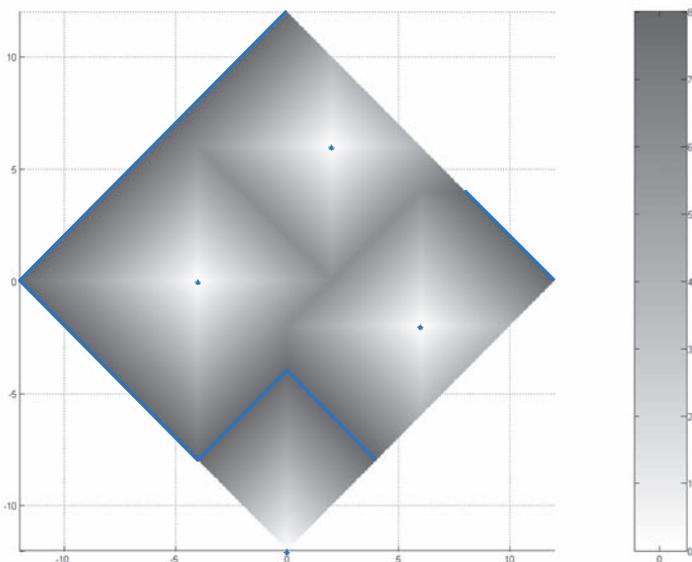


En la construcción del conjunto de posibles soluciones se ha tardado menos de 15 minutos; este consumo de tiempo nos parece razonable, habida cuenta que hemos aproximado los límites de la región autonómica por una poligonal con 59 vértices.



## EJEMPLO 17

Aunque en este trabajo sólo se ofrecen las correspondientes implementaciones para resolver los problemas de localización de un centro peligroso de nuestro modelo general, cuando la norma considerada es la euclídea, las dos últimas rutinas nos permiten ilustrar de forma gráfica los comentarios ofrecidos en el ejemplo que aparece al principio del capítulo 5.



Las poblaciones equiponderadas de dicho ejemplo están situadas en los puntos  $a_1 = (-4, 0)$ ,  $a_2 = (2, 6)$ ,  $a_3 = (6, -2)$  y  $a_4 = (0, -12)$ , y aparecen en la figura marcadas con un asterisco. También se observa que el máximo de los valores de la función objetivo (según la barra de grises que figura a la derecha) que nos permite modelar el problema "maximin" es 8, cuando nos restringimos a la poligonal determinada por los puntos  $(-12, 0)$ ,  $(0, -12)$ ,  $(0, 12)$  y  $(12, 0)$  y la norma utilizada es  $\|\cdot\|_1$ . Además, aparecen resaltados con un trazo grueso en azul, los puntos en los que alcanza dicho valor.





## CAPÍTULO VII:

### IMPLEMENTACIONES



## Implementaciones

En este capítulo ofrecemos las implementaciones en `MATLAB` de las rutinas que se han elaborado de forma paralela a este trabajo y que se presentan de forma separada en cada una de las secciones siguientes. En ellas, podemos observar dos bloques bien diferenciados:

- en el primer bloque, que se corresponde con las secciones 7.1, 7.2, 7.3 y 7.4, se presentan aquellas que han llamado nuestra atención de entre las que se utilizan para resolver los problemas clásicos de localización:
  - para el problema “minisum” se han implementado las rutinas denominadas *torrcell* y *wtorrcell* para las versiones sin pesos y ponderada, respectivamente, del problema de Weber para tres puntos y además, han servido de ayuda para la elaboración de las figuras que acompañan al texto. Para el problema de Weber con más de tres puntos, se ofrece la versión más simple del algoritmo de Weiszfeld que ha sido anteriormente comentada en la subsección 1.2.5.
  - para el problema “minimax”, hemos optado por construir la rutina que hemos denominado *charalam* a partir de los resultados que se pueden encontrar en (Charalambous, 1982). El tratamiento geométrico que se hace en dicho trabajo de este problema nos ha permitido elaborar algunas subrutinas geométricas que han sido reutilizadas más adelante.
- el segundo bloque está dedicado exclusivamente a la implementación de una rutina para nuestro problema ponderado de localización de centros no deseados a partir de los resultados teóricos que aparecen en este trabajo y que además nos ha permitido construir las figuras que ilustran nuestros ejemplos.

## 7.1. La rutina *torcell*

Nuestro objetivo para esta sección es la construcción de una rutina capaz de determinar el punto que haga mínima la suma de las distancias a tres puntos dados. Para ello, hemos utilizado la construcción de Simpson que ha sido presentada en la subsección 1.2.2 y se han elaborado las subrutinas auxiliares *equilater* e *interec* que se presentan a continuación:

### 7.1.1. La subrutina *equilater*

La rutina *equilater(A,B,C)* determina las coordenadas del punto  $P_{AB}$  que forma con A y con B un triángulo equilátero al otro lado de C

$$\text{Ejemplo: } \text{equilater}([0 \ 0],[1 \ 0],[0 \ -1]) \text{ devuelve } P_{AB} = \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

```

00 function Pab=equilater(A,B,C)
01 p1=[(A(1)+B(1))/2 (A(2)+B(2))/2]+...
    sqrt(3)/2*[B(2)-A(2) A(1)-B(1)];
02 p2=[(A(1)+B(1))/2 (A(2)+B(2))/2]-...
    sqrt(3)/2*[B(2)-A(2) A(1)-B(1)];
03 if ((A(2)-B(2))*p1(1)+(B(1)-A(1))*p1(2)-B(1)*A(2)+...
    A(1)*B(2))*((A(2)-B(2))*C(1)+(B(1)-A(1))*C(2))-...
    B(1)*A(2)+A(1)*B(2))>0 Pab=p2;
04 else Pab=p1;
05 end

```

### 7.1.2. La subrutina *interec*

La rutina *interec(S1,S2,S3,S4)* determina las coordenadas del punto  $Q$  que es intersección de las rectas determinadas por los puntos  $S1,S2$  y  $S3,S4$  respectivamente. Si las rectas no tuvieran ningún punto en común o fueran la misma recta, la instrucción *interec* devuelve la matriz vacía.

$$\text{Ejemplo: } \text{interec}([0 \ 1],[0 \ 2],[1 \ 0],[2 \ 0]) \text{ devuelve } Q = (0,0).$$

```

00 function Q=interec(S1,S2,S3,S4)
01 den=det([S2(1)-S1(1) S3(1)-S4(1);S2(2)-S1(2) S3(2)-S4(2)]);
02 if den==0 Q=[];
03 else L=det([S3(1)-S1(1) S3(1)-S4(1);...
    S3(2)-S1(2) S3(2)-S4(2)]/den;...
    Q=[S1(1)+L*(S2(1)-S1(1)) S1(2)+L*(S2(2)-S1(2))];
04 end

```

### 7.1.3. La rutina *torrcell*

La rutina *torrcell*(*A,B,C*) utiliza la construcción de Simpson para calcular las coordenadas del punto *T* de Torricelli del triángulo de vértices *A*, *B* y *C*

Ejemplo: *torrcell*([0 1],[sqrt(3)/2 -1/2],[sqrt(3)/2 -1/2]) devuelve *T* = (0,0).

```

00 function T=torrcell(A,B,C)
01 if ((A(1)-B(1))*(C(1)-B(1))+A(2)-B(2))*(C(2)-B(2))/...
    (sqrt((A(1)-B(1))^2+(A(2)-B(2))^2))*...
    sqrt((C(1)-B(1))^2+(C(2)-B(2))^2)<-1/2 T=B;
02 elseif ((A(1)-C(1))*(B(1)-C(1))+A(2)-C(2))*(B(2)-C(2))/...
    (sqrt((A(1)-C(1))^2+(A(2)-C(2))^2))*...
    sqrt((B(1)-C(1))^2+(B(2)-C(2))^2)<-1/2 T=C;
03 elseif ((B(1)-A(1))*(C(1)-A(1))+B(2)-A(2))*(C(2)-A(2))/...
    (sqrt((B(1)-A(1))^2+(B(2)-A(2))^2))*...
    sqrt((C(1)-A(1))^2+(C(2)-A(2))^2)<-1/2 T=A;
04 else T=interec(C,equilater(A,B,C),B,equilater(A,C,B));
05 end

```

### 7.2. La rutina *wtorrcell*

La rutina *wtorrcell*(*A,B,C,w1,w2,w3*) se basa en el trabajo (Martini, 1996) que ha sido comentado en la subsección 1.2.2 para determinar la solución del problema de Weber con tres puntos ponderados, es decir, determina las coordenadas del punto *T* de Torricelli del triángulo de vértices *A*, *B* y *C* con pesos relativos *w1*, *w2* y *w3*, respectivamente

Ejemplo: *wtorrcell*([0 1],[sqrt(3)/2 -1/2],[sqrt(3)/2 -1/2],5,3,4) devuelve *T* = (0.0662,0.3635).

```

00 function T=wtorrcell(A,B,C,w1,w2,w3)
01 plot(A(1),A(2),'*r');hold on
02 plot(B(1),B(2),'*r');hold on
03 plot(C(1),C(2),'*r');hold on
04 w11=sqrt((B(1)-C(1))^2+(B(2)-C(2))^2);
05 w22=sqrt((A(1)-C(1))^2+(A(2)-C(2))^2);
06 w33=sqrt((B(1)-A(1))^2+(B(2)-A(2))^2);
07 p1=w11/w1;
08 p2=w22/w2;
09 p3=w33/w3;
10 x1=w1-(w1^2-w2^2+w3^2)/(2*w1);
11 h1=sqrt(w3^2-((w1^2-w2^2+w3^2)/(2*w1))^2);
12 h11=p1*h1;
13 A11(1)=B(1)+((w1-x1)/w1)*(C(1)-B(1))+((h11/w11)*(C(2)-B(2)));

```

```

14 A11(2)=B(2)+((w1-x1)/w1)*(C(2)-B(2))+((h11/w11)*(B(1)-C(1)));
15 A12(1)=B(1)+((w1-x1)/w1)*(C(1)-B(1))-((h11/w11)*(C(2)-B(2)));
16 A12(2)=B(2)+((w1-x1)/w1)*(C(2)-B(2))-((h11/w11)*(B(1)-C(1)));
17 if ((B(2)-C(2))*A11(1)+(C(1)-B(1))*A11(2)-...
    C(1)*B(2)+B(1)*C(2))*((B(2)-C(2))*A(1)+(C(1)-B(1))*A(2)-...
    C(1)*B(2)+B(1)*C(2))>0 A1=A12;
18 else A1=A11;
19 end
20 plot(A1(1),A1(2),'*g'); hold on;
21 x2=w2-(w1^2+w2^2-w3^2)/(2*w2);
22 h2=sqrt(w1^2-((w1^2+w2^2-w3^2)/(2*w2))^2);
23 h22=p2*h2;
24 B11(1)=C(1)+((w2-x2)/w2)*(A(1)-C(1))+((h22/w22)*(A(2)-C(2)));
25 B11(2)=C(2)+((w2-x2)/w2)*(A(2)-C(2))+((h22/w22)*(C(1)-A(1)));
26 B12(1)=C(1)+((w2-x2)/w2)*(A(1)-C(1))-((h22/w22)*(A(2)-C(2)));
27 B12(2)=C(2)+((w2-x2)/w2)*(A(2)-C(2))-((h22/w22)*(C(1)-A(1)));
28 if ((A(2)-C(2))*B11(1)+(C(1)-A(1))*B11(2)-...
    C(1)*A(2)+A(1)*C(2))*...
    ((A(2)-C(2))*B(1)+(C(1)-A(1))*B(2)-C(1)*A(2)+A(1)*C(2))>0
    B1=B12;
29 else B1=B11;
30 end
31 plot(B1(1),B1(2),'*g'); hold on;
32 x3=w3-(w2^2+w3^2-w1^2)/(2*w3);
33 h3=sqrt(w2^2-((w2^2+w3^2-w1^2)/(2*w3))^2);
34 h33=p3*h3;
35 C11(1)=A(1)+((w3-x3)/w3)*(B(1)-A(1))+((h33/w33)*(B(2)-A(2)));
36 C11(2)=A(2)+((w3-x3)/w3)*(B(2)-A(2))+((h33/w33)*(A(1)-B(1)));
37 C12(1)=A(1)+((w3-x3)/w3)*(B(1)-A(1))-((h33/w33)*(B(2)-A(2)));
38 C12(2)=A(2)+((w3-x3)/w3)*(B(2)-A(2))-((h33/w33)*(A(1)-B(1)));
39 if ((A(2)-B(2))*C11(1)+(B(1)-A(1))*C11(2)-...
    B(1)*A(2)+A(1)*B(2))*...
    ((A(2)-B(2))*C(1)+(B(1)-A(1))*C(2)-B(1)*A(2)+A(1)*B(2))>0 C1=C12;
40 else C1=C11;
41 end
42 plot(C1(1),C1(2),'*g');
43 T=interec(A1,A,B1,B);
44 plot(T(1),T(2),'*'); axis equal

```

### 7.3. La rutina *weis*

La instrucción *weis(P,w,n)* determina la n-ésima iteración del algoritmo de Weiszfeld, presentado en la subsección 1.2.5, para la matriz de puntos P siendo w el vector de pesos asociados y tomando como punto inicial el baricentro ponderado correspondiente.

Ejemplo: *weis([1/2 -1/2;-1/2 -1/2;-1/2 1/2;1/2 1/2;100 0],[1 1 1 1 4],100000)* devuelve

```
00 function X=weis(P,w,n)
01 X(1)=sum(w'.*P(:,1))/sum(w);
02 X(2)=sum(w'.*P(:,2))/sum(w);
03 disp('starting point'), X
04 for i=1:n
05   Z(1)=sum(w'.*P(:,1))./...
      sqrt((X(1)-P(:,1)).^2+(X(2)-P(:,2)).^2))/...
      sum(w'./sqrt((X(1)-P(:,1)).^2+(X(2)-P(:,2)).^2));
06   Z(2)=sum(w'.*P(:,2))./...
      sqrt((X(1)-P(:,1)).^2+(X(2)-P(:,2)).^2))/...
      sum(w'./sqrt((X(1)-P(:,1)).^2+(X(2)-P(:,2)).^2));
07   X=Z;
08 end
```

### 7.4. La rutina *charalam*

Nuestro objetivo para esta sección es la construcción de una rutina capaz de determinar el punto que haga mínima el máximo de las distancias a una colección dada de puntos ponderados. Para ello, hemos utilizado el algoritmo que aparece en (Charalambous, 1982) que ha sido presentado en la sección 1.3. Además de las rutinas auxiliares *recoloca*, *maxindex* y *optimo*, y las geométricas *generalconcirc* y *circint*, también se han elaborado las subrutinas *chara2* y *chara3* para determinar el correspondiente punto cuando éste viene determinado por 2 de los puntos dados o para el caso en el que venga determinado por 3 de ellos. Todas estas subrutinas se detallan a continuación.

### 7.4.1. La subrutina recoloca

Esta subrutina técnica se ha diseñado para ser llamada por la rutina *charalam*.

```

00 function salida=recoloca(A,B)
01 [ma,na]=size(A); [mb,nb]=size(B);filas=[];
02 for j=1:ma
03 for k=1:mb
04 cuantos=(A(j,:)==B(k,:));
05 if sum(cuantos)==3 filas=[filas k];
06 end
07 end
08 end
09 filas=sort(filas);
10 B(filas,:)=[]; salida=[A;B];

```

### 7.4.2. La subrutina maxindex

Esta subrutina técnica se ha diseñado para ser llamada por la rutina *charalam*.

```

00 function salida=maxindex(possible,Q)
01 [mq,nq]=size(Q); valores=[];
02 for k=1:mq
03 valores=[valores Q(k,3)*...
           sqrt((possible(1)-Q(k,1))^2+(possible(2)-Q(k,2))^2)];
04 end
05 [maximo,indice]=max(valores);
06 salida=[maximo,indice];

```

### 7.4.3. La subrutina optimo

Esta subrutina técnica se ha diseñado para ser llamada por la rutina *charalam*.

```

00 function respuesta=optimo(punto,Q)
01 valores=[]; [m,n]=size(Q);
02 for k=1:m
03 valores=[valores Q(k,3)*...
           sqrt((punto(1)-Q(k,1))^2+(punto(2)-Q(k,2))^2)];
04 end
05 [maximo,indice]=max(valores);
06 if valores(1)==max(valores) respuesta=1;
07 else respuesta=0;
08 end

```

#### 7.4.4. La subrutina *generalconcirc*

La instrucción *generalconcirc*( $u,P,r$ ) determina los puntos de intersección de la recta cuya ecuación general es  $u(1) \cdot x + u(2) \cdot y + u(3) = 0$ , siendo  $u=[u(1) \ u(2) \ u(3)]$ , con la circunferencia de centro el punto  $P$  y de radio  $r$ . Si no hubiera ningún punto común, la instrucción devuelve la matriz vacía.

```
00 function Q=generalconcirc(u,P,r)
01 d=(u(1)*P(1)+u(2)*P(2)+u(3))/sqrt(u(1)^2+u(2)^2);
02 if abs(d)>r Q=[];
03 else Q(1,:)= [P(1)-d/sqrt(u(1)^2+u(2)^2)*u(1) ...
    P(2)-d/sqrt(u(1)^2+u(2)^2)*u(2)]+...
    sqrt(r^2-d^2)/sqrt(u(1)^2+u(2)^2)*[-u(2),u(1)];
04 Q(2,:)= [P(1)-d/sqrt(u(1)^2+u(2)^2)*u(1) ...
    P(2)-d/sqrt(u(1)^2+u(2)^2)*u(2)]-...
    sqrt(r^2-d^2)/sqrt(u(1)^2+u(2)^2)*[-u(2),u(1)];
05 end
06 Q=unique(Q,'rows');
```

#### 7.4.5. La subrutina *circint*

La instrucción *circint*( $p0,q0,r0,p1,q1,r1$ ) determina los puntos de intersección de dos circunferencias, siendo el centro y el radio de la primera ( $p0,q0$ ) y  $r0$  respectivamente, y ( $p1,q1$ ) y  $r1$  el centro y el radio de la segunda. Si no hubiera ningún punto común o las circunferencias fuesen iguales, la instrucción devuelve la matriz vacía.

```
00 function Q=circint(p0,q0,r0,p1,q1,r1)
01 M=sort([sqrt((p0-p1)^2+(q0-q1)^2) r0 r1]);Q=[];
02 if any([p0,q0]~= [p1,q1]) & M(3)<=(M(2)+M(1))
03 if q0>q1 x0=p1;y0=q1;s0=r1;x1=p0;y1=q0;s1=r0;
04 else x0=p0;y0=q0;s0=r0;x1=p1;y1=q1;s1=r1;
05 end
06 k=sqrt((x0-x1)^2+(y0-y1)^2);
07 b=acos((s1^2-s0^2-k^2)/(2*s0*k));
08 d=acos((x1-x0)/k);
09 Q=[x0-s0*cos(d-b) y0-s0*sin(d-b)];
10 if M(3)<(M(2)+M(1)) Q=[Q;x0-s0*cos(d+b) y0-s0*sin(d+b)];
11 end
12 end
```

### 7.4.6. La subrutina *circunc*

La instrucción *circunc(A,B,C)* determina el centro de la circunferencia pasa por los puntos A, B y C, en el caso en el que dichos puntos no estén alineados.

```

00 function P=circunc(A,B,C)
01 if det([1 1 1;A(1,1) B(1,1) C(1,1);A(1,2) B(1,2) C(1,2)])==0
    P=[];
02 else
03 P=[det([1 1 1;A(1,1)^2+A(1,2)^2 B(1,1)^2+...
    B(1,2)^2 C(1,1)^2+C(1,2)^2;...
    A(1,2) B(1,2) C(1,2)])/(2*det([1 1 1;A(1,1) B(1,1)
    C(1,1); A(1,2) B(1,2) C(1,2)])),...
    det([1 1 1;A(1,1)^2+A(1,2)^2 B(1,1)^2+...
    B(1,2)^2 C(1,1)^2+C(1,2)^2;...
    A(1,1) B(1,1) C(1,1)])/(-2*det([1 1 1;A(1,1) B(1,1)
    C(1,1); A(1,2) B(1,2) C(1,2)]))];
04 end

```

### 7.4.7. La subrutina *chara2*

Esta subrutina técnica se ha diseñado para ser llamada por la rutina *charalam* y nos permite determinar la solución del problema “minimax” en el caso en el que éste venga determinado por 2 de los puntos dados.

```

00 function sol=chara2(P,w)
01 sol=(w(1)/(w(1)+w(2)))*P(1,:)+(w(2)/(w(1)+w(2)))*P(2,:);

```

### 7.4.8 La subrutina *chara3*

Esta subrutina técnica se ha diseñado para ser llamada por la rutina *charalam* y nos permite determinar la solución del problema “minimax” en el caso en el que éste venga determinado por 3 de los puntos dados.

```

00 function sol=chara3(P,w)
01 M=[P w'];
02 M1=min(M(:,3))*ones(3,1);
03 comp=M1~M(:,3);
04 if sum(comp)==1
05 M1=sortrows([M comp],4);
06 M=M1(:,1:3);
07 else
08 M=flipud(sortrows(M,3));
09 end
10 w=M(:,3)';

```

```

11 if w(2)~=w(3)
12 Centro1=w(2)^2/(w(2)^2-w(3)^2)*M(2,1:2)-...
    w(3)^2/(w(2)^2-w(3)^2)*M(3,1:2);
13 R1=w(2)*w(3)/abs(w(2)^2-w(3)^2)*...
    sqrt((M(2,1)-M(3,1))^2+(M(2,2)-M(3,2))^2);
14 if w(1)~=w(2)
15 Centro2=w(1)^2/(w(1)^2-w(2)^2)*M(1,1:2)-...
    w(2)^2/(w(1)^2-w(2)^2)*M(2,1:2);
16 R2=w(1)*w(2)/abs(w(1)^2-w(2)^2)*...
    sqrt((M(1,1)-M(2,1))^2+(M(1,2)-M(2,2))^2);
17 Posible=circint(Centro1(1),Centro1(2),R1,...
    Centro2(1),Centro2(2),R2);
18 else
19 A=M(2,1)-M(1,1); B=M(2,2)-M(1,2);
20 C=-((M(1,1)+M(2,1))*A+(M(1,2)+M(2,2))*B)/2;
21 Posible=generalconcirc([A B C],Centro1,R1);
22 end
23 elseif w(1)~=w(2)
24 A=M(3,1)-M(2,1); B=M(3,2)-M(2,2);
25 C=-((M(2,1)+M(3,1))*A+(M(2,2)+M(3,2))*B)/2;
26 Centro1=w(1)^2/(w(1)^2-w(2)^2)*M(1,1:2)-...
    w(2)^2/(w(1)^2-w(2)^2)*M(2,1:2);
27 R1=w(1)*w(2)/abs(w(1)^2-w(2)^2)*...
    sqrt((M(1,1)-M(2,1))^2+(M(1,2)-M(2,2))^2);
28 Posible=generalconcirc([A B C],Centro1,R1);
29 else Posible=circunc(M(1,:),M(2,:),M(3,:));
30 end
31 [m,n]=size(Posible);
32 if m==1 sol=Posible;
33 else
34 r1=(Posible(1,1)-M(2,1))^2-(Posible(1,2)-M(2,2))^2;
35 r2=(Posible(2,1)-M(2,1))^2-(Posible(2,2)-M(2,2))^2;
36 if r1<r2 sol=Posible(1,:);
37 else sol=Posible(2,:);
38 end
39 end

```

### 7.4.9 La rutina *charalam*

La instrucción *charalam*(*P,w*) devuelve la solución al problema “minimax” para los puntos cuyas coordenadas vienen especificadas por las filas de la matriz *P* y los pesos asociados a cada uno de dichos puntos constituyen las componentes del vector *w*, habiendo sido utilizada en su construcción el algoritmo que aparece en (Charalambous, 1982).

```

00 function sol=charalam(P,w)
01 sol=[]; M=[];Q=[P';w'];
02 candidato=chara2(Q(1:2,1:2),Q(1:2,3)'); nf=2;
03 while isempty(sol)
04  comprueba=maxindex(candidato,Q);
05  if comprueba(2)==1 sol=[candidato comprueba(1)];nf=0;
06  elseif nf==2;
07     M=[Q(1:2,:);Q(comprueba(2),:)];
08     M=recoloca([M(3,:)],M);
09     candidato=chara2([M(1,1:2);M(2,1:2)],[M(1,3) M(2,3)]);
10     if optimo(candidato,M)==1 Q=recoloca([M(1,:);M(2,:),Q]);
11     else M=recoloca([M(3,:)],M);
12     candidato=chara2([M(1,1:2);M(2,1:2)],[M(1,3) M(2,3)]);
13     if optimo(candidato,M)==1 ...
14         Q=recoloca([M(1,:);M(2,:),Q]);
15     else nf=3; candidato=chara3(M(:,1:2),(M(:,3))');
16         Q=recoloca(M,Q);
17     end
18 elseif nf==3; comprueba=maxindex(candidato,Q);
19 if comprueba(2)==1 sol=[candidato comprueba(1)];nf=0;
20 else M=[Q(1:3,:);Q(comprueba(2),:)];
21 M=recoloca([M(4,:)],M);
22 candidato=chara2([M(1,1:2);M(2,1:2)],[M(1,3) M(2,3)]);
23 if optimo(candidato,M)==1 nf=2;
24 Q=recoloca([M(1,:);M(2,:),Q]);
25 else M=recoloca([M(4,:)],M);
26 candidato=chara2([M(1,1:2);M(2,1:2)],...
[M(1,3) M(2,3)]);
27 if optimo(candidato,M)==1 nf=2;
28 Q=recoloca([M(1,:);M(2,:),Q]);
29 else M=recoloca([M(4,:);M(2,:),M]);
30 candidato=chara2([M(1,1:2);M(2,1:2)],...
[M(1,3) M(2,3)]);
31 if optimo(candidato,M)==1 nf=2;
32 Q=recoloca([M(1,:);M(2,:),Q]);
33 else candidato=chara3([M(1,1:2);M(2,1:2);...
M(3,1:2)],[M(1,3) M(2,3) M(3,3)]);
34 if optimo(candidato,M)==1 nf=3;
35 Q=recoloca([M(1,:);M(2,:);M(3,:),Q]);

```

```

36     else M=recoloca([M(4,:)],M);
37     candidato=chara3([M(1,1:2);M(2,1:2);...
M(3,1:2)],[M(1,3) M(2,3) M(3,3)]);
38     if optimo(candidato,M)==1 nf=3;
39     Q=recoloca([M(1,:);M(2,:);M(3,:)],Q);
40     else
41     nf=3;
42     Q=recoloca([M(1,:);M(3,:);M(4,:)],Q);
43     end
44     end
45     end
46     end
47     end
48     end
49     end
50 end

```

### 7.5. La rutina *undesirable*

En esta última sección, construiremos una rutina que genere una tabla con las coordenadas de los puntos candidatos a ser solución del problema ordenado de localización de centros no deseados que abarca nuestro trabajo, cuando nos restringimos a una región poligonal y para el caso en el que la norma utilizada sea la euclídea. También se han elaborado las subrutinas gráficas *pintamedia* y *wplot*, que serán presentadas más adelante, que nos permitirán visualizar los resultados cómodamente.

Para la implementación de esta rutina, se han diseñado las subrutinas técnicas *quitarep*, *isinpoly*, *inconvex* e *intermedia* y también serán presentadas más adelante.

Basándonos en los resultados obtenidos en el capítulo anterior (ver principio del capítulo 6), el conjunto de puntos candidatos lo podemos construir determinando:

- por una parte, los puntos del interior de la región poligonal dada que pertenezcan al interior de la envolvente convexa determinada por las poblaciones afectadas y a dos mediatrices ponderadas que se interesquen transversalmente (y obtenidos con la subrutina *candinterior*),
- y por otra, los puntos que pertenezcan a alguna mediatriz ponderada e intersequen transversalmente a la frontera de la región poligonal dada (y obtenidos con la subrutina *candfrontera*).

### 7.5.1. La subrutina *quitarep*

La instrucción *quitarep(A,tol)*, diseñada para ser llamada por *undesirable*, nos permite eliminar las filas iguales de la matriz A, entendiéndose como filas iguales las que la diferencia de sus componentes es menor que el parámetro de tolerancia *tol*.

```
00 function A=quitarep(A,tol)
01 if isempty(A)~=1
02 A=sortrows(A);
03 x=A(1,:); k=2;
04 while k<=size(A,1)
05 if norm(x-A(k,:),inf)<tol
06 A(k,:)=[];
07 else
08 x=A(k,:); k=k+1;
09 end
10 end
11 end
```

### 7.5.2. La subrutina *isinpoly*

La instrucción *isinpoly(X,A)*, diseñada para ser llamada por *undesirable*, devuelve 1 ó 0 según que el punto X pertenezca o no al polígono determinado por los puntos de la matriz A. Para ello, el polígono ha de quedar a la izquierda cuando se recorren los puntos de la matriz A.

```
00 function output=isinpoly(X,A)
01 [m,n]=size(A); suma=0;
02 if size(unique([unique(A,'rows');X],'rows'))==...
    size(unique(A,'rows')) output=1;
03 else A(m+1,:)=A(1,:);
04 for k=1:m
05 u=A(k,:)-X; v=A(k+1,:)-X; num=u(1)*v(2)-u(2)*v(1);...
    den=u(1)*v(1)+u(2)*v(2);
06 if den==0
07 if num>0 add=1/2;
08 else add=-1/2;
09 end
10 elseif num==0 & den<0 add=1;
11 elseif num<0 & den>0 add=atan(num/den)/pi;
12 elseif num<0 & den<0 add=-1+atan(num/den)/pi;
13 elseif num>0 & den<0 add=1+atan(num/den)/pi;
14 else add=atan(num/den)/pi;
15 end
16 suma=suma+add;
```

```

17 end
18 if suma<=1 output=0;
19 else output=1;
20 end
21 end

```

### 7.5.3. La subrutina *inconvex*

La instrucción *inconvex(P,Z)*, diseñada para ser llamada por *undesirable*, devuelve 1 ó 0 según que el punto Z pertenezca o no a la envolvente convexa determinada por los puntos de la matriz P.

```

00 function isinconvex=inconvex(P,Z)
01 Q=[]; X=P(:,1); Y=P(:,2);
02 indices=convhull(X,Y);
03 [m,n]=size(indices);
04 P=P(indices(1:m-1),:);
05 if isinpoly(Z,P)==1 isinconvex=1;
06 else isinconvex=0;
07 end

```

### 7.5.4. La subrutina *intermedia*

La instrucción *intermedia(P1,P2,w1,w2,P3,P4,w3,w4,region)*, diseñada para ser llamada por *undesirable*, determina los puntos de cortes transversales de la mediatriz ponderada correspondiente a los puntos P1 y P2 con pesos w1 y w2 con la mediatriz ponderada correspondiente a los puntos P3 y P4 con pesos w3 y w4 y que además se encuentren dentro de la región poligonal determinada por los puntos de la matriz region, siendo tal región la que queda a la izquierda al recorrer los puntos de la citada matriz.

```

00 function puntos=intermedia(P1,P2,w1,w2,P3,P4,w3,w4,region)
01 puntos=[];
02 if w1==w2 & w3==w4
03 primero=[(P1+P2)/2;(P1+P2)/2+[P1(2)-P2(2) P2(1)-P1(1)]];
04 segundo=[(P3+P4)/2;(P3+P4)/2+[P3(2)-P4(2) P4(1)-P3(1)]];
05 cortes=interec(primeros(1,:),primeros(2,:),...
    segundos(1,:),segundos(2,:));
06 cortes=[cortes;cortes];
07 elseif w1==w2 & w3~=w4
08 cortes=generalconcirc([P2(1)-P1(1) P2(2)-P1(2) ...
    (P1(1)^2+P1(2)^2-P2(1)^2-P2(2)^2)/2],...
    w3^2/(w3^2-w4^2).*P3-w4^2/(w3^2-w4^2).*P4,...
    w3*w4*sqrt((P3(1)-P4(1))^2+(P3(2)-P4(2))^2)/...
    abs(w3^2-w4^2));

```

```

09 elseif w1~=w2 & w3==w4
10 cortes=generalconcirc([P4(1)-P3(1) P4(2)-P3(2) ...
(P3(1)^2+P3(2)^2-P4(1)^2-P4(2)^2)/2],...
w1^2/(w1^2-w2^2).*P1-w2^2/(w1^2-w2^2).*P2,...
w1*w2*sqrt((P1(1)-P2(1))^2+(P1(2)-P2(2))^2)/...
abs(w1^2-w2^2));
11 else
12 cortes=circint(w1^2/(w1^2-w2^2)*P1(1)-...
w2^2/(w1^2-w2^2)*P2(1),...
w1^2/(w1^2-w2^2)*P1(2)-w2^2/(w1^2-w2^2)*P2(2),...
w1*w2*sqrt((P1(1)-P2(1))^2+(P1(2)-P2(2))^2)/...
abs(w1^2-w2^2),...
w3^2/(w3^2-w4^2)*P3(1)-w4^2/(w3^2-w4^2)*P4(1),...
w3^2/(w3^2-w4^2)*P3(2)-w4^2/(w3^2-w4^2)*P4(2),...
w3*w4*sqrt((P3(1)-P4(1))^2+(P3(2)-P4(2))^2)/...
abs(w3^2-w4^2));
13 end
14 [m,n]=size(cortes);
15 if m==2
16 for i=1:2;
17 if isinpoly(cortes(i,:),region)==1
18 puntos=[puntos; cortes(i,:)];
19 end
20 end
21 puntos=quitarep(puntos,10^(-5));
22 end

```

### 7.5.5. La subrutina *candinterior*

La instrucción *candinterior*( $P, Q, w$ ), llamada por *undesirable*, determina los candidatos a solución (según los resultados del principio del capítulo 6) de los problemas de localización de un centro no deseado que sean interiores a la región poligonal determinada por los puntos de la matriz  $Q$ , siendo tal región la que queda a la izquierda al recorrer los puntos de la citada matriz. Las poblaciones afectadas vienen determinadas por los puntos de la matriz  $P$  y sus pesos respectivos figuran como componentes del vector  $w$ .

```

00 function candinterior=candinterior(P,Q,w)
01 matriz=[]; permuta=[];
02 candinterior=[];
03 probarcon=[]; [m,n]=size(P);
04 for i=1:m
05 matriz=[matriz; P(i,:) w(i)];
06 end
07 [m,n]=size(matriz);
08 k=nchoosek(m,2);

```

```

09 for i=1:m-1
10   for j=i+1:m
11     permuta=[permuta; matriz(i,:) matriz(j,:)];
12   end
13 end
14 for i=1:k-1
15   for j=i+1:k
16     probarcon=[probarcon; permuta(i,:) permuta(j,:)];
17   end
18 end
19 for i=1:nchoosek(nchoosek(m,2),2)
20   aspirante=intermedia(probarcon(i,1:2),...
      probarcon(i,4:5),probarcon(i,3),probarcon(i,6),...
      probarcon(i,7:8),probarcon(i,10:11),probarcon(i,9),...
      probarcon(i,12),Q);
21 [a,b]=size(aspirante);
22 for l=1:a
23   if incon vex(P,aspirante(l,:))==1
24     candinterior=[candinterior; aspirante(l,:)];
25   end
26 end
27 end
28 candinterior=quitarep(candinterior,10(-5));

```

### 7.5.6. La subrutina candfrontera

La instrucción *candfrontera*( $P, Q, w$ ), llamada por *undesirable*, determina los candidatos a solución (según los resultados del principio del capítulo 6) de los problemas de localización de un centro no deseado que pertenezcan a la frontera de la región poligonal determinada por los puntos de la matriz  $Q$ , siendo tal región la que queda a la izquierda al recorrer los puntos de la citada matriz. Las poblaciones afectadas vienen determinadas por los puntos de la matriz  $P$  y sus pesos respectivos figuran como componentes del vector  $w$ .

```

00 function candfrontera=candfrontera(P,Q,w)
01 candfrontera=[];
02 Qc=[Q; Q(1,:)];
03 [mq,nq]=size(Qc);
04 [mp,np]=size(P);
05 for k=1:mq-1
06   for i=1:mp-1
07     for j=i+1:mp
08       if w(i)~=w(j)
09         centro=w(i)^2/(w(i)^2-w(j)^2)*P(i,:)-...
            w(j)^2/(w(i)^2-w(j)^2)*P(j,:);
10         r=w(i)*w(j)*sqrt((P(i,1)-P(j,1))^2+...

```

```

    (P(i,2)-P(j,2))^2)/abs(w(i)^2-w(j)^2);
11  u=[Qc(k+1,2)-Qc(k,2) Qc(k,1)-Qc(k+1,1) ...
    Qc(k+1,1)*Qc(k,2)-Qc(k,1)*Qc(k+1,2)];
12  aspirante=generalconcirc([u(1) u(2) u(3)],...
    w(i)^2/(w(i)^2-w(j)^2). *P(i,:)-...
    w(j)^2/(w(i)^2-w(j)^2). *P(j,:),...
    w(i)*w(j)*sqrt((P(i,1)-P(j,1))^2+...
    (P(i,2)-P(j,2))^2)/abs(w(i)^2-w(j)^2));
13  else primero=(P(i,:)+P(j,:))/2+...
    [P(j,2)-P(i,2),P(i,1)-P(j,1)];
14  segundo=(P(i,:)+P(j,:))/2-...
    [P(j,2)-P(i,2),P(i,1)-P(j,1)];
15  aspirante=interec(Qc(k,:),Qc(k+1,:),...
    primero,segundo);
16  end
17  orden=sort([Qc(k,1),Qc(k+1,1)]);
18  [r,s]=size(aspirante);
19  for t=1:r
20  if (aspirante(t,1)<=orden(2) & ...
    aspirante(t,1)>=orden(1))
    candfrontera=[candfrontera; aspirante(t,:)];
21  end
22  end
23  end
24  end
25  end
26  candfrontera=quitarep(candfrontera,10^(-5));

```

### 7.5.7. La subrutina *wsaame*

La instrucción *wsaame(P,X,u,w)*, llamada por *undesirable*, determina el valor de la función objetivo asociada al criterio determinado por el vector *u*, en cada uno de los puntos de la matriz *X*, siendo las poblaciones afectadas las determinadas por los puntos de la matriz *P* y sus pesos respectivos figuran como componentes del vector *w*. La sustitución de la línea 07 por cualquiera de las líneas comentadas (precedidas por el carácter % y que corresponden respectivamente a la  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_5$  y a cualquier otra que se almacene con el nombre *otranorma*) nos permitiría construir el mapa de colores (utilizando la instrucción *wplot* presentada a continuación) para visualizar el comportamiento de la función objetivo asociada a cualquier criterio seleccionado.

```

00 function T=wsaame(P,X,u,w)
01 T=[];
02 [a,b]=size(P);
03 [c,d]=size(X);
04 for i=1:c

```

```

05 v=[];
06 for k=1:a;
07 v = [v w(k)*sqrt((X(i,1)-P(k,1))^2+...
    (X(i,2)-P(k,2))^2)];
    %v= [v w(k)*(abs(X(i,1)-P(k,1))+...
    % abs(X(i,2)-P(k,2)))]);
    %v= [v w(k)*((abs(X(i,1)-P(k,1)))^5+...
    % (abs(X(i,2)-P(k,2)))^5)^(1/5)];
    %v= [v, w(k)*otranorma(X(i,1)-P(k,1),...
    % X(i,2)-P(k,2))];
08 end;
09 T=[T sort(v)*u'];
10 end;

```

### 7.5.8. La subrutina wplot

La instrucción `wplot(P,Q,u,w,a,b)`, llamada por *undesirable*, genera una salida gráfica representando los valores de la función objetivo asociada al criterio determinado por el vector `u` para la norma seleccionada en la rutina `wsaame` anterior, siendo `P` una matriz con las coordenadas de las poblaciones afectadas, `Q` una matriz con los vértices de la región poligonal factible, siendo tal región la que queda a la izquierda al recorrer los puntos de la citada matriz, el vector `w` los pesos correspondientes a cada población y `a` y `b` dos escalares indicando las divisiones a considerar en los ejes  $X$  e  $Y$  respectivamente. Los valores de la función objetivo se corresponden con la barra de colores que aparece a la derecha de la gráfica.

```

00 function wplot(P,Q,u,w,a,b)
01 maximos=max(Q); minimos=min(Q);maximovalor=0;
02 [x,y]=meshgrid(minimos(1):(maximos(1)-minimos(1))/a:...
    minimos(1),...
    minimos(2):(maximos(2)-minimos(2))/b:maximos(2));
03 [m,n]=size(x);
04 for i=1:m
05 for j=1:n
06 if isinpoly([x(i,j),y(i,j)],Q)~=1 z(i,j)=NaN;
07 else z(i,j)=wsaame(P,[x(i,j),y(i,j)],u,w);
08 if z(i,j)>maximovalor maximovalor=z(i,j); end
09 end
10 end
11 end
12 surf(x,y,z); shading interp; hold on; view([0,90])
13 colormap(1-(jet/2)); colorbar; axis equal;
14 plot3(P(:,1),P(:,2),1+maximovalor+0.*P(:,1),'*');
15 Qc=[Q; Q(1,:)];
16 plot3(Qc(:,1),Qc(:,2),1+maximovalor+0.*Qc(:,1))

```

### 7.5.9. La subrutina pintamedia

Esta rutina, llamada desde la rutina *undesirable* que se presentará a continuación, nos permite completar la gráfica obtenida con *wplot*, incluyendo en la misma las mediatrices ponderadas asociadas a cualquier par de poblaciones, elegidas de entre las indicadas en la matriz P siendo los pesos asociados los determinados por el vector w.

```

00 function pintamedia(P,Q,w,h)
01 [m,n]=size(P);maximos=max(Q); minimos=min(Q);
02 xmax=maximos(1);xmin=minimos(1);
03 ymax=maximos(1); ymin=minimos(1);
04 hold on; axis([xmin xmax ymin ymax])
05 for i=1:m-1
06   for j=i+1:m
07     if w(i)==w(j)
08       if P(i,1)-P(j,1)==0
09         plot3([(P(i,1)+P(j,1))/2,(P(i,1)+P(j,1))/2],...
10              [ymin,ymax],[h h], 'g')
11       else primerpar=[(P(i,:)+P(j,:))/2;...
12                      (P(i,:)+P(j,:))/2+...
13                      [P(i,2)-P(j,2) P(j,1)-P(i,1)]];
14       primero=interc(primerpar(1,:),primerpar(2,:),...
15                      [xmin ymin],[xmax ymax]);
16       segundo=interc(primerpar(1,:),primerpar(2,:),...
17                      [xmax ymin],[xmax ymax]);
18       if isempty(primerpar(1,:)) & isempty(segundo)~=1
19         plot3([primero(1) segundo(1)],...
20              [primero(2) segundo(2)],[h h], 'g')
21       end
22     end
23   else
24     centro=w(i)^2/(w(i)^2-w(j)^2)*P(i,:)-...
25            w(j)^2/(w(i)^2-w(j)^2)*P(j,:);
26     radio=w(i)*w(j)*sqrt((P(i,1)-P(j,1))^2+...
27                        (P(i,2)-P(j,2))^2)/abs(w(i)^2-w(j)^2);
28     t=0:pi/60:2*pi;
29     plot3(centro(1)+radio*cos(t),...
30           centro(2)+radio*sin(t),h+0.*t,'g');
31   end
32 end
33 end
34 end
35 plot3(P(:,1),P(:,2),h+0.*P(:,1),'*')

```

### 7.5.10. La rutina *undesirable*

Por último, la rutina *undesirable*( $P,Q,w,u,a,b$ ) resuelve el problema ordenado de localización de un centro no deseado dentro de una región poligonal, siendo  $P$  una matriz con las coordenadas de las poblaciones afectadas,  $Q$  una matriz con las coordenadas de los vértices la región poligonal, ordenados de tal forma que, al recorrer la matriz, la región quede a la izquierda del sentido de la marcha,  $w$  el vector de pesos asociados a cada población y  $u$  el vector asociado al criterio elegido. Devuelve una tabla con las coordenadas de los puntos candidatos y los correspondientes valores de la función objetivo. Además utiliza las rutinas anteriores *pintamedia* y *wplot* para generar una salida gráfica con un mapa de colores dividiendo la región indicada, un número  $a$  de veces en el eje  $X$  y  $b$  veces en el eje  $Y$ .

Para el vector asociado al criterio, y siendo  $m$  el número de poblaciones afectadas, podemos utilizar el vector  $u=[1 \ -1 \ \text{zeros}(1,m-2)]$  para obtener el diagrama de Voronoi, el vector  $u=[1 \ \text{zeros}(1,m-1)]$  para resolver el problema "maximin" y  $u=\text{ones}(1,m)$  para resolver el problema "maxisum".

```

00 function undesirable(P,Q,w,u,a,b)
01 interiores=candinterior(P,Q,w);
02 frontera=quitarep([candfrontera(P,Q,w);Q],10^(-5));
03 candidatos=quitarep([interiores;frontera],10^(-5));
04 valores=wsaame(P,candidatos,u,w);
05 [candidatos';valores]'
06 [maximo,indice]=max(valores);
07 wplot(P,Q,u,w,a,b); hold on;
08 extrdcho=max(Q); extrizq=min(Q);
09 xmax=extrdcho(1);xmin=extrizq(1);
10 ymax=extrdcho(1); ymin=extrizq(1);
11 axis equal; axis([xmin xmax ymin ymax])
12 plot3(P(:,1),P(:,2),maximo+0.*P(:,1),'*'); hold on;
13 pintamedia(P,Q,w,maximo); hold on
14 if isempty(interiores)~=1
15  plot3(interiores(:,1),interiores(:,2),...
        maximo+0.*interiores(:,1),'k.');
```

```
16 end
```

```
17 if isempty(frontera)~=1
```

```
18 plot3(frontera(:,1),frontera(:,2),...
        maximo+0.*frontera(:,1),'k.');
```

```
19 end
```

```
20 plot3(candidatos(indice,1),candidatos(indice,2),maximo,'rh')
```

```
21 Qc=[Q;Q(1,:)]; plot3(Qc(:,1),Qc(:,2),maximo+0.*Qc(:,1))
```

```
22 X=P(:,1); Y=P(:,2);indices=convhull(X,Y);
```

```
23 plot3(X(indices),Y(indices),maximo+0.*indices)
```



## **CAPÍTULO VIII:**

### **CONCLUSIONES, APORTACIONES Y TRABAJOS FUTUROS**



## Conclusiones, aportaciones y trabajos futuros

Estas últimas páginas están dedicadas a presentar un breve resumen en el que recogemos las conclusiones y las aportaciones más relevantes de este trabajo e indicamos algunas líneas abiertas de investigación que serán abordadas en el futuro.

En este trabajo hemos abordado el problema de localización de centros no deseados en el plano, restringiendo el conjunto de soluciones factibles a una región cerrada y acotada. A modo de introducción y motivación, en los dos primeros capítulos hemos realizado un rápido recorrido por los problemas generales de localización, desde los resultados relacionados con los problemas más clásicos, que también se denominan problemas de localización de centros deseados, hasta los resultados más relevantes de la bibliografía, de entre los que hemos destacado los que se centran en los problemas de localización de centros no deseados.

En el capítulo tercero se hace una primera aproximación al problema, abordándolo a través del concepto de dominancia que nos sirve, en general, para eliminar ciertas regiones del conjunto inicial, observando que, para los puntos de tales regiones, podemos encontrar otros que son preferibles por todas y cada una de las poblaciones afectadas y hemos impuesto esta condición como requisito para la elección de cualquier criterio coherente con el que determinar una ubicación óptima para un centro no deseado. La conclusión a la que hemos llegado en dicho capítulo es que podemos restringir nuestra búsqueda de soluciones óptimas en la región factible, a los puntos de su frontera y a los puntos que pertenezcan a la envolvente convexa de las poblaciones afectadas por el centro a instalar, aunque en esta primera reducción de puntos candidatos a solución óptima todavía nos encontramos con infinitos puntos en nuestra región de búsqueda.

En el cuarto capítulo hemos construido una función objetivo general que nos permite modelar, como casos particulares, los principales problemas de localización de centros no deseados que existen en la bibliografía, estableciéndose los criterios más usuales en términos de dicha función y, aproximando la región factible por una poligonal, hemos obtenido un conjunto de puntos candidatos a ser una solución óptima de nuestro problema a través de ciertas condiciones expresadas en términos de igualdades para las distancias ponderadas a las poblaciones consideradas. Así, los puntos candidatos de la frontera de la región factible son los vértices de dicha región o aquellos otros puntos que equi-

distan ponderadamente de dos poblaciones afectadas, mientras que los puntos interiores de la región son aquellos que se obtienen como intersección de dos de dichas mediatrices ponderadas. Una ventaja que presenta esta caracterización del conjunto de puntos candidatos es que es independiente de la particularización que, al especificar los criterios considerados, hagamos de los correspondientes parámetros de la función. Esto supone que, una vez determinados dichos puntos, basta con evaluar sobre ellos la función objetivo asociada a cada uno de dichos criterios, pudiendo así optar por la solución más admisible y el criterio que la genera.

También hemos observado que pueden existir soluciones óptimas fuera de nuestro conjunto de puntos candidatos, aunque en tal caso, existe alguna en tal conjunto que es tan preferible como aquella. En el quinto capítulo hemos probado que esta situación no se puede presentar si imponemos la condición de que la distancia considerada provenga de una norma estrictamente convexa. En este caso, hemos puesto de manifiesto que cualquier solución óptima pertenece al conjunto caracterizado anteriormente a través de mediatrices ponderadas.

La naturaleza de la distancia empleada condicionará el cumplimiento de ciertas propiedades geométricas y topológicas de tales mediatrices y, por tanto, el que el conjunto de puntos candidatos sea finito o no. En el caso particular más extendido en el que la distancia utilizada sea la que proviene de la norma euclídea, hemos demostrado que dicho conjunto es finito e igualmente sucede para normas elípticas. Es decir, para regiones factibles poligonales, el conjunto formado por la unión del conjunto de los vértices de la región considerada, del conjunto de puntos de la frontera de dicha región que equidistan ponderadamente de dos poblaciones afectadas y el conjunto de los puntos interiores que se obtienen como intersección dos mediatrices ponderadas correspondientes a dos pares de poblaciones distintas, es finito. Esto nos conduce a un algoritmo con una complejidad computacional de orden  $\mathcal{O}(m^4)$ , siendo  $m$  el número de poblaciones afectadas que nos permite determinar la solución de cualquier problema de este tipo.

Sin embargo, la mayoría de los problemas de localización de centros no deseados son problemas de decisión multicriterio en los que se establecen varios criterios de interés. Un procedimiento usual en la toma de decisiones multicriterio consiste en la construcción de un nuevo criterio a partir de la suma ponderada de los considerados, asociando a cada uno de ellos un peso positivo que refleje la importancia que el decisor asigna a cada uno de ellos.

Cuando todos los criterios considerados se expresan mediante la especificación de los correspondientes parámetros de la función objetivo propuesta, hemos demostrado que la solución correspondiente al problema multicriterio ponderado se encuentra también en el conjunto de puntos candidatos que hemos caracterizado. Además, hemos analizado en este trabajo cuál es la utilidad de considerar el problema multicriterio y atribuir pesos a las poblaciones en función del número de habitantes de las mismas, pues tanto la determinación del criterio como la elección de los pesos dependen de la naturaleza del problema que

deseemos resolver y así, a modo de ejemplo y con la ayuda de las rutinas en MATLAB que hemos construido y cuyos códigos también se ofrecen, hemos aplicado los resultados de nuestro trabajo tanto a diversos ejemplos teóricos como a un caso concreto en el que la región de referencia es la comunidad autónoma andaluza considerando todas las poblaciones de más de 50.000 habitantes.

Finalmente, como líneas de investigación de trabajos futuros, nos proponemos

- determinar un conjunto de puntos candidatos cuando utilizamos normas poligonales en la construcción de la función objetivo al modelar el impacto sobre cada población de un centro no deseado.
- aplicando la metodología aquí expuesta, determinar la ubicación óptima de otros objetos geométricos, tales como segmentos anclados (especialmente útil en localización de rutas de transportes de mercancías peligrosas), cuadrados, rectángulos, polígonos o círculos (instalación de complejos industriales que ocupan una gran extensión con respecto a la región donde hay que instalarla), siendo esta línea sobre la que actualmente estamos trabajando.
- explorar cómo han de realizarse las asignaciones de los pesos asociados a las distintas poblaciones en un problema real si se desean considerar diversos criterios y la posibilidad de utilizar este mismo procedimiento cuando los pesos pueden tomar valores positivos o negativos, lo que nos permitiría tratar el problema de localización de centros atractivos y repulsivos a la vez, problema éste de interés pues existen servicios que unas poblaciones querrían tenerlos cerca y otras lejos.
- en colaboración con el grupo de investigación en el que participo, trabajamos en la búsqueda de otros algoritmos basados en redes neuronales e intentaremos aplicar nuestro modelo a casos prácticos concretos, siguiendo, por ejemplo, la línea de colaboración abierta con sede en Fuengirola del Instituto Español de Oceanografía.



## BIBLIOGRAFÍA



## Bibliografía

- ▶ Berger, M. (1987). *Geometry I*. Springer-Verlag, Berlín.
- ▶ Brimberg, J. (1989). *Properties of Distance Functions and Minisum Location Models*. PhD thesis, McMaster University.
- ▶ Brimberg, J. (1995). The Fermat-Weber location problem revisited. *Mathematical Programming*, 71:71–76.
- ▶ Brimberg, J., Chen, R. y Chen, D. (1998). Accelerating convergence in the Fermat-Weber location problem. *Operations Research Letters*, 22:151–157.
- ▶ Brimberg, J. y Juel, H. (1998). A bicriteria model for locating a semi-desirable facility in the plane. *European Journal of Operational Research*, 106:144–151.
- ▶ Cánovas, L., Cañavate, R. y Marín, A. (2002). On the convergence of the Weiszfeld algorithm. *Mathematical Programming*, 93:327–330.
- ▶ Chandrasekaran, R. y Tamir, A. (1989). Open Questions Concerning Weiszfeld's Algorithm for the Fermat-Weber Location Problem. *Mathematical Programming*, 44:293–295.
- ▶ Charalambous, C. (1982). Extension of the Elzinga-Hearn Algorithm to the Weighted Case. *Operations Research*, 30(3):591–594.
- ▶ Colebrook, M., Gutiérrez, J. y Sicilia, J. (2003). Localización de un servicio no deseado en redes usando el criterio anti-cent-dian. *XXVII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*.
- ▶ Corbalán, A. G., Mazón, M. y Recio, T. (1996). Geometry of Bisectors for strictly convex distances. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 6(1):45–58.
- ▶ Dasarathy, B. y White, L. J. (1980). A maxmim location problem. *Operations Research*, 28:1385–1401.

- Díaz Báñez, J. M. y Lozano, A. J. (2001). La ponderación en problemas de optimización geométrica. *Actas del IX encuentro de Geometría Computacional*. Universidad de Girona.
- Dorrie, H. (1965). *100 Great Problems of Elementary Mathematics, their History and Solution*. Dover. (Traducido por D. Antin).
- Drezner, Z. (1992). A Note on the Weber Location Problem. *Annals of Operations Research*, 40:153–161.
- Drezner, Z. (1996). A Note on Accelerating the Weiszfeld Procedure. *Location Science*, 3:275–279.
- Drezner, Z. y Suzuki, A. (2004). The Big Triangle Small Triangle Method for the Solution of Nonconvex Facility Location Problems. *Operations Research*, 52:128–135.
- Drezner, Z. y Wesolowsky, G. O. (1980a). A Maximin Location Problem with Maximum Distance Constraints. *AIIE Transactions*, 12:249–252.
- Drezner, Z. y Wesolowsky, G. O. (1980b). Single facility  $l_p$  distance minimax location. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 1(3):315–321.
- Drezner, Z. y Wesolowsky, G. O. (1983). The location of an obnoxious facility with rectangular distances. *Journal of Regional Science*, 23:241–248.
- Drezner, Z. y Wesolowsky, G. O. (1991). The Weber Problem on the plane with some negative weights. *INFOR*, 29(2):87–99.
- Elzinga, D. y Hearn, D. (1972). Geometrical solutions for some minimax location problems. *Transportation Science*, 6:379–394.
- Erkut, E. y Öncü, T. S. (1991). A parametric 1-maximin location problem. *Journal of Operational Research Society*, 42(1):49–55.
- Fernández, J., Fernández, P. y Pelegrín, B. (2000). A continuous location model for siting a non-noxious undesirable facility within a geographical region. *European Journal of Operational Research*, 121:259–274.
- Fernández Palacín, F. (1994). *Un problema de localización maxmin con restricciones*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.
- Francis, R. L., Leon, F., McGinnis, L. F. y White, J. A. (1992). *Facility Layout and Location: An Analytical Approach*. Prentice-Hall, New York, 2nd edition.
- Friedrich, C. J. (1929). *Theory of the Location of Industries*. University of Chicago Press, Chicago.
- Guerrero García, C., Saameño Rodríguez, J. J. y Muñoz Pérez, J. (2003). Un modelo general para el problema de localización de centros peligrosos con cualquier norma. *XXVII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*.

- ▶ Hansen, P., Peeters, D., Richard, D. y Thisse, J. (1985). The Minisum and Minimax Location Problems Revisited. *Operations Research*, 33:1251–1265.
- ▶ Hansen, P., Peeters, D. y Thisse, J. F. (1981). On the location of an obnoxious facility. *Sistemi Urbani*, 3:299–317.
- ▶ Hansen, P. y Thisse, J. F. (1981). The Weber Problem revisited. Université Catholique de Louvain (Belgium), SPUR (Unité de Science et de Programmation Urbaines et Régionales). R.P. 10.
- ▶ Honsberger, R. (1973). *Mathematical Gems from Elementary Combinatorics, Number Theory and Geometry*. Mathematical Association of America, Buffalo.
- ▶ Icking, C., Klein, R., Ma, L., Nickel, S. y Weißler, A. (2001). On Bisectors for different distance functions. *Discrete Applied Mathematics*, 109:139–161.
- ▶ Juel, H. y Love, R. (1986). A Geometrical Interpretation of the Existing Facility Solution Condition for the Weber Problem. *Journal of the Operational Research Society*, 37:1129–1131.
- ▶ Kuhn, H. W. (1967). On a Pair of Dual Nonlinear Programs. In *Nonlinear Programming*. New Holland, Amsterdam, Netherlands.
- ▶ Kuhn, H. W. (1973). A note on Fermat's Problem. *Mathematical Programming*, 4:98–107.
- ▶ Kuhn, H. W. (1976). *Nonlinear Programming: A Historical View*. American Mathematical Society, 9:1–26.
- ▶ Kuhn, H. W. y Kuenne, R. (1962). An Efficient Algorithm for the Numerical Solution of the Generalized Weber Problem in Spatial Economics. *Journal of Regional Science*, 4:21–33.
- ▶ Leal Santos, F. (1995). *Geometría Combinatoria de Curvas Algebraicas y Diagramas de Delaunay en el Plano*. Tesis Doctoral. Universidad de Cantabria.
- ▶ Leybourn, T. (1817). *The Mathematical Questions proposed in the Ladies' Diary and their original answers, together with some new solutions, from its commencement in the year 1704 to 1816*, volume II. J. Mawman.
- ▶ Love, R. F. (1967). A Note on the Convexity of Siting Depots. *International Journal of Production Research*, 6:153–154.
- ▶ Love, R. F., Morris, J. G., y Wesolowsky, G. O. (1988). *Facilities Location: Models and Methods*. North-Holland, New York.
- ▶ Lozano, A. J. y Mesa, J. A. (2000). Location of Facilities with Undesirable Effects and Inverse Location Problems: A Classification. *Studies in Locational Analysis*, 14:253–291.

- ▶ Lozano, A. J., Mesa, J. A., y Plastria, F. (1999). The Euclidean Anti-k-Centrum Problem. Report BEIF 117, Department of Management Informatics. Vrije Universiteit Brussel, Belgium.
- ▶ Ma, L. (2000). *Bisectors and Voronoi Diagrams for Convex Distance Functions*. PhD thesis, Department of Computer Science, FernUniversität Hagen.
- ▶ Martini, H. (1996). A Geometric Generalization of the Vecten-Fasbender Duality. *Studies in Locational Analysis*, 10:53–65.
- ▶ Mazón, M. L. (1991). *Diagramas de Voronoi en caleidoscopios*. Tesis Doctoral. Universidad de Cantabria.
- ▶ Melachrinoudis, E. (1985). Determining an optimum location for an undesirable facility in a workroom environment. *Applied Mathematical Modelling*, 9:365–369.
- ▶ Melachrinoudis, E. y Culliane, T. P. (1985). Locating an undesirable facility within a geographical region using the maximin criterion. *Journal of Regional Science*, 25(1):115–127.
- ▶ Melachrinoudis, E. y Culliane, T. P. (1986). Locating an obnoxious facility within a polygonal region. *Annals of Operations Research*, 6:137–145.
- ▶ Melachrinoudis, E. y MacGregor Smith, J. (1995). An  $O(n \cdot m^2)$  algorithm for the Maximin problem in  $E^2$ . *Operations Research Letters*, 18:25–30.
- ▶ Melzak, Z. A. (1983). *Invitation to Geometry*. Wiley, New York.
- ▶ Moreno Pérez, J. A. y Rodríguez Martín, I. (1999). Anti-cent-dian on Networks. *Studies in Locational Analysis*, 12:29–39.
- ▶ Morris, J. G. (1981). Convergence of the Weiszfeld Algorithm for Weber Problems Using a Generalized distance Function. *Operations Research*, 29:37–48.
- ▶ Muñoz Pérez, J. y Saameño Rodríguez, J. J. (1999). Location of an undesirable facility in a polygonal region with forbidden zones. *European Journal of Operational Research*, 114:372–379.
- ▶ Ohsawa, Y. y Tamura, K. (2003). Efficient Location for a Semi-Obnoxious Facility. *Annals of Operations Research*, 123:173–188.
- ▶ Plastria, F. (1992a). GBSSS, the generalized Big Square Small Square Method for planar single facility location. *European Journal of Operational Research*, 62:163–174.
- ▶ Plastria, F. (1992b). On destination optimality in asymmetric distance Fermat-Weber problems. *Annals of Operations Research*, 40:355–369.
- ▶ Plastria, F. y Carrizosa, E. (1999). Undesirable facility location with minimal covering objectives. *European Journal of Operational Research*, 119:158–180.

- ▶ Rochat, Vecten, Fauquier y Pilatte (1811). Questions Resolues: Solutions des deux problemes proposes a la page 384 du premier volume des annales. *Annales de Mathematiques Pures et Appliques*, 2:88–93.
- ▶ Romero Morales, D., Carrizosa, E. y Conde, E. (1997). Semi-obnoxious location models: A global optimization approach. *European Journal of Operational Research*, 102:295–301.
- ▶ Saameño Rodríguez, J. J. (1992). *Localización Multicriterio de centros peligrosos*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.
- ▶ Shamos, M. I. (1975). Geometric Complexity. In *Proceedings of the Seventh ACM Symposium on Theory of Computing*. 224-233.
- ▶ Shamos, M. I. y Hoey, D. (1975). Closest-point problems. 16th Annual IEEE Symposium On Foundations of Computer Science. 151-162.
- ▶ Simpson, T., editor (1755). *Ladies Diary or Woman's Almanack*, volume 52. Company of Stationery.
- ▶ Sylvester, J. J. (1857). A question in the geometry of situation. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1:79.
- ▶ Toussaint, G. T. (1983). Computing Largest Empty Circles with Location Constraints. *International Journal of Computer and Information Sciences*, 12(5):347–358.
- ▶ Velasco Morente, F. (1991). *Localización de centros atractivos y repulsivos*. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla
- ▶ Weber, A. (1909). *Über den Standort der Industrien*. Tübingen, Germany. (Una versión inglesa traducida en Friedrich, 1929).
- ▶ Weiszfeld, E. (1936). Sur le Point Pour Lequel la Somme des Distances de n Points Donnes est Minimum. *Tohoku Mathematical Journal*, 43:355–386.
- ▶ Wendell, R. E. y Hurter, A. P. (1973). Location Theory, Dominance and Convexity. *Operations Research*, 21:314–320.
- ▶ Wesolowsky, G. O. (1993). The Weber Problem: History and Perspectives. *Location Science*, 1:5–23.
- ▶ Witzgall, C. (1964). *Optimal Location of a Central Facility: Mathematical Models and Concepts*. National Bureau of Standards Report, 8388. Gaithersberg, Maryland.
- ▶ Zacharias, M. (1913). Elementargeometrie und elementare nicht-euklidische Geometrie in Synthetischer Behandlung. In *Encyclopadie der mathematischen Wissenschaften (Geometrie)*. Leipzig, Germany.



Este trabajo se enmarca dentro de los denominados problemas de localización, cuyo objetivo es la determinación de la ubicación óptima, dentro de una región dada, para instalar un centro de servicios que afectará de una u otra forma a un conjunto de núcleos de población. A partir de la segunda mitad del siglo XX y como consecuencia de la Revolución Industrial, empezaron a proliferar centros de servicio o de almacenamiento que, aún siendo imprescindibles, pueden tener consecuencias negativas para la salud o el medio ambiente. Como ejemplos actuales, podemos citar como centros de este tipo a las centrales nucleares, cementerios de residuos tóxicos o radioactivos, fábricas contaminantes ambiental o acústicamente, plantas de tratamiento de desechos de centros urbanos (vertederos), o incluso cualquier otro tipo de instalaciones que generan un rechazo colectivo (justificado o no) en las poblaciones colindantes tan pronto como son conocedoras de su posible ubicación (cárceles, centros para el tratamiento y rehabilitación de personas drogodependientes, ...). La determinación de la ubicación óptima para instalar un centro de este tipo dota a estos problemas de una marcada componente social o medioambiental.

El modelo que aquí proponemos permite abordar, a través de una teoría unificada, una amplia familia de problemas de localización de centros no deseados, determinando un conjunto de posibles ubicaciones dentro del cual podemos garantizar que existe la solución para todos y cada uno de los problemas que nuestro modelo admite. Además, es suficientemente flexible permitiendo así una mayor precisión en el modelado, tanto del tejido social como del impacto medioambiental, en cada caso concreto.

Publicaciones CES-A  
COLECCIÓN PREMIO DE INVESTIGACIÓN

## Un Modelo Multicriterio de Localización de Centros No Deseados con Pesos

Carlos Guerrero García